

Agrégation interne de Mathématiques

(et CAERPA)

Session 2004

Première épreuve écrite

Définitions et notations

Dans ce texte, \mathbf{C} est identifié à \mathbf{R}^2 . Pour x dans \mathbf{C} on note $\text{Im } x$ sa partie imaginaire.

Pour tout x dans \mathbf{C} et tout réel positif r on note $\overline{D}(x, r) = \{y \in \mathbf{C}, |x - y| \leq r\}$ le disque fermé de \mathbf{C} , de centre x et de rayon r .

Si M est une matrice carrée, $\text{tr}(M)$ désigne sa trace.

Si A, B et C sont des parties d'un ensemble E , on convient d'écrire $C = A \amalg B$ lorsque $C = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

Pour $n=1$ ou 2 , on note \mathfrak{I}_n le groupe des isométries *affines* euclidiennes de \mathbf{R}^n . On note \mathfrak{I}_n^+ le sous-groupe des isométries affines euclidiennes directes.

Lorsque E est un ensemble, on note (\mathfrak{S}_E, \circ) le groupe des bijections de E sur lui-même. \mathfrak{I}_n est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_{\mathbf{R}^n}, \circ)$.

Soit E un ensemble non vide et G un sous-groupe de \mathfrak{S}_E ; on convient de dire qu'une partie *non vide* \mathcal{D} de E est *G -dédoublable* s'il existe des parties \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de \mathcal{D} telles que

(i) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \amalg \mathcal{D}_2$;

(ii) il existe g_1 et g_2 dans G tels que $g_1(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_1$ et $g_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_2$.

Autrement dit, et de façon imagée, \mathcal{D} est *G -dédoublable* lorsque l'on peut la découper en deux parties, chacune étant superposable à \mathcal{D} sous l'action de G .

Objectifs du problème

Les trois premières parties étudient l'existence éventuelle d'une partie de \mathbf{C} (resp. de \mathbf{R}) \mathfrak{I}_2 -dédoublable (resp. \mathfrak{I}_1 -dédoublable). Ces trois parties sont indépendantes.

La partie **IV** propose l'étude algébrique d'un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ engendré par deux matrices. Elle prépare aussi la partie **V** où l'on généralise le concept d'ensemble dédoublable en celui d'ensemble paradoxal sous l'action d'un groupe.

La partie **V** est dévolue à l'étude de deux ensembles qui se révèlent paradoxaux sous l'action du groupe étudié dans la partie **IV**.

Partie I : Parties dédoublables de $\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$

A. Étude d'un premier exemple

On considère le disque fermé $\overline{D} = \{x \in \mathbf{C}, |x| \leq 1\}$.

1. On suppose l'existence de parties A et B de \overline{D} telles que

$$\overline{D} = A \amalg B; \quad 0 \in A; \quad \exists \tau \in \mathfrak{I}_2, \tau(A) = B.$$

(a) Montrer que si deux points x et y de \overline{D} vérifient $|x - y| = 2$ alors leur milieu est 0 .

(b) Montrer que pour w dans \overline{D} , la condition $|w - \tau(0)| > 1$ entraîne $w \in A$ (on pourra raisonner par contraposition).

(c) En déduire l'existence d'un diamètre $[u, v]$ de \overline{D} à extrémités u, v dans A .

(d) Relever une contradiction.

2. En déduire que le disque fermé \overline{D} de \mathbf{C} n'est pas \mathfrak{I}_2 -dédoublable.

B. Cas des parties bornées

Plus généralement on se propose de montrer que

Aucune partie *bornée* de \mathbf{C} n'est \mathfrak{I}_2 -dédoublable.

La preuve qui suit est due à H. HADWIGER et H. DEBRUNNER [1964].

B 1. Disque enveloppant minimal

Soit \mathcal{B} une partie non vide et *bornée* de \mathbf{C} . Pour r dans \mathbf{R}_+ on pose $\mathcal{C}_r = \{x \in \mathbf{C}, \mathcal{B} \subset \overline{D}(x, r)\}$ et $R = \{r \in \mathbf{R}_+, \mathcal{C}_r \neq \emptyset\}$.

1. (a) Montrer que l'ensemble R admet une borne inférieure ; on note ρ cette borne inférieure.
(b) Établir l'énoncé suivant :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists x_n \in \mathbf{C}, \mathcal{B} \subset \overline{D}\left(x_n, \rho + \frac{1}{n}\right).$$

2. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite convergente.
(b) En déduire l'existence d'un nombre complexe a tel que $\mathcal{B} \subset \overline{D}(a, \rho)$.
(c) Démontrer l'unicité d'un tel a .

Autrement dit la partie \mathcal{B} est contenue dans un *unique* disque fermé de rayon *minimum*.

B 2. Conclusion

1. Dresser sans démonstration la liste des différents *types* de transformations géométriques qui constituent le groupe \mathfrak{I}_2 .
2. On suppose l'existence d'une partie *bornée* et non vide, \mathcal{B} , de \mathbf{C} , qui est \mathfrak{I}_2 -dédoublable. On adopte alors les notations suivantes :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2, \text{ avec } \tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ dans } \mathfrak{I}_2 \text{ vérifiant } \mathcal{B}_i = \tau_i(\mathcal{B}) \text{ pour } i = 1, 2.$$

On remarquera que, pour $i = 1, 2$, $\tau_i(\mathcal{B})$ est *strictement* contenu dans \mathcal{B} .

- (a) Montrer que les isométries τ_i ne peuvent être que des rotations différentes de l'identité. On note ω_i le centre de τ_i pour $i = 1, 2$.
- (b) En considérant l'unique disque $D(a, \rho)$ de rayon minimum contenant \mathcal{B} [voir la section **B1**], montrer que $\omega_1 = a = \omega_2$.
- (c) Montrer que $\tau_1(\tau_2(\mathcal{B})) \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, relever une contradiction, puis conclure.

Partie II : Le paradoxe de SIERPINSKI-MAZURKIEWICZ [1914]

On se propose de décrire une partie *non bornée* de \mathbf{C} et \mathfrak{I}_2 -dédoublable.

Un nombre complexe ξ est dit *transcendant* si le seul polynôme à coefficients rationnels dont il est racine est le polynôme nul. On utilisera librement l'existence d'un nombre transcendant u de module égal à 1.

On note $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbf{N} , et l'on pose

$$\mathcal{D} = \{P(u), P \in \mathcal{P}_{\mathbf{N}}\}.$$

Soient t et r les transformations du plan complexe définies pour x dans \mathbf{C} par $t(x) = x + 1$ et $r(x) = ux$ respectivement.

1. En exploitant le caractère transcendant de u , établir que $t(\mathcal{D}) \cap r(\mathcal{D}) = \emptyset$.
2. Montrer que l'ensemble \mathcal{D} est \mathfrak{I}_2 -dédoublable (on pourra commencer par montrer que tout polynôme P de $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$ peut être écrit sous l'une des deux formes suivantes : $P = R + 1$ ou $P = XS$ avec R et S dans $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$).

Partie III : Parties dédoublables de \mathbf{R}

On se propose d'établir le résultat suivant [W. SIERPINSKI] :

Aucune partie de \mathbf{R} n'est \mathfrak{I}_1 -dédoublable.

Les sections **A**, **B** et **C** sont dévolues à la preuve de ce résultat.

A. La croissance d'un groupe

Soit G un groupe de loi interne notée multiplicativement et d'élément neutre noté 1. Soit S une partie finie de $G \setminus \{1\}$, supposée symétrique au sens suivant : $\forall x \in S, x^{-1} \in S$.

Le sous-groupe de G engendré par S est alors l'ensemble des produits finis d'éléments de S (on convient que le produit vide vaut 1) ; on le note $\langle S \rangle$.

La longueur relativement à S , $\ell_S(x)$, d'un élément x de $\langle S \rangle$ est définie de la manière suivante : $\ell_S(1) = 0$, et, pour $x \neq 1$, $\ell_S(x)$ est le plus petit entier p tel que l'on puisse écrire $x = s_1 s_2 \cdots s_p$, avec s_k dans S pour $1 \leq k \leq p$.

Pour n entier strictement positif on pose $B_S(n) = \{x \in \langle S \rangle, \ell_S(x) \leq n\}$, $\gamma_S(n) = \text{Card } B_S(n)$ [le cardinal de $B_S(n)$] et $c_S(n) = (\gamma_S(n))^{\frac{1}{n}}$.

1. Établir l'inégalité :

$$\forall p, q \geq 1, \quad \gamma_S(p+q) \leq \gamma_S(p)\gamma_S(q).$$

2. Pour n dans \mathbf{N}^* , on pose $u_n = \ln \gamma_S(n)$ et $v_n = \frac{u_n}{n}$.

(a) Soient n et p dans \mathbf{N}^* ; en effectuant la division euclidienne de n par p , établir la majoration $v_n \leq v_p + \frac{p}{n}v_1$.

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers $v = \inf_{n \geq 1} v_n$.

3. Démontrer la convergence de la suite $(c_S(n))_{n \geq 1}$ vers une limite C_S , et vérifier l'inégalité $C_S \geq 1$.

Le groupe G est dit à *croissance sous-exponentielle* lorsque, pour chaque S , partie finie symétrique de $G \setminus \{1\}$, on a $C_S = 1$.
Il est dit à *croissance exponentielle* dans le cas contraire.

4. Que dire de la croissance de G s'il contient un sous-groupe à croissance exponentielle ?
5. Montrer qu'un groupe *abélien* est toujours à croissance sous-exponentielle.

B. La croissance du groupe \mathfrak{J}_1

On considère une partie S de $\mathfrak{J}_1 \setminus \{Id\}$, finie et symétrique.

1. Montrer que \mathfrak{J}_1 est formé des transformations $x \mapsto ux + v$, avec $u = \pm 1$ et $v \in \mathbf{R}$.
2. Soient $\varepsilon = \pm Id$ et s dans S ; prouver l'existence et l'unicité de t dans \mathfrak{J}_1^+ et de $\varepsilon' = \pm Id$ tels que $\varepsilon \circ s = t \circ \varepsilon'$.

On note T_0 la partie *finie* de \mathfrak{J}_1^+ obtenue en collectant les divers éléments t lorsque le couple (ε, s) décrit l'ensemble $\{\pm Id\} \times S$. On pose alors

$$T = \{ \tau \in \mathfrak{J}_1^+, \tau \in T_0 \text{ ou } \tau^{-1} \in T_0 \}$$

puis on considère les parties $B_S(n)$ de \mathfrak{J}_1 et $B_T(n)$ de \mathfrak{J}_1^+ , pour n quelconque dans \mathbf{N}^* .

3. Démontrer que

$$\forall \tau \in B_S(n), \quad \exists (\sigma, \varepsilon) \in B_T(n) \times \{\pm Id\}, \quad \tau = \sigma \circ \varepsilon.$$

4. En déduire que le groupe \mathfrak{J}_1 est à croissance sous-exponentielle.

C. Conclusion

On suppose ici l'existence d'une partie \mathcal{D} de \mathbf{R} , non vide et \mathfrak{J}_1 -dédoublable.

On adopte alors les notations :

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \amalg \mathcal{D}_2$, avec τ_1, τ_2 dans \mathfrak{J}_1 tels que $\tau_i(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_i$ ($i = 1, 2$).

Pour n dans \mathbf{N}^* et $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ dans $\{\tau_1, \tau_2\}^n$ on pose $\gamma_s = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n$.

1. Montrer que, pour tout couple (s, s') de $\{\tau_1, \tau_2\}^n$ tel que $s \neq s'$, on a $\gamma_s(\mathcal{D}) \cap \gamma_{s'}(\mathcal{D}) = \emptyset$.
2. On pose $S = \{\tau_1, \tau_1^{-1}, \tau_2, \tau_2^{-1}\}$. Déduire de la question précédente une minoration de la constante C_S pour le groupe \mathfrak{J}_1 .
3. Relever une contradiction, et en déduire qu'aucune partie de \mathbf{R} n'est \mathfrak{J}_1 -dédoublable.

D. La croissance du groupe \mathfrak{J}_2

La croissance du groupe \mathfrak{J}_2 est-elle exponentielle ou bien sous-exponentielle ? (On pourra s'inspirer de la section III.C).

Partie IV : Un groupe « paradoxal »

Dans cette partie on se propose d'étudier un groupe Γ dont les propriétés seront exploitées dans la partie V.

Soit $SL_2(\mathbf{Z})$ le groupe des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients entiers et de déterminant égal à 1 ; son élément neutre est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note E l'espace des matrices colonnes réelles $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
On s'intéresse au sous-groupe Γ de $SL_2(\mathbf{Z})$ engendré par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

A. Calculs préliminaires

1. Calculer A^k et B^k pour k dans \mathbf{Z} .
2. On pose :

$$\Gamma_1 = \{A^k, k \in \mathbf{Z}\}, \quad \Gamma_2 = \{B^k, k \in \mathbf{Z}\}, \quad E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E, |x| > |y| \right\}, \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E, |x| < |y| \right\}$$

Démontrer les énoncés suivants :

- (1) $\forall M \in \Gamma_1 \setminus \{I\}, \quad \forall X_2 \in E_2, \quad MX_2 \in E_1$
- (2) $\forall P \in \Gamma_2 \setminus \{I\}, \quad \forall X_1 \in E_1, \quad PX_1 \in E_2$

B. Les éléments de Γ

Dans la suite, on convient des notations suivantes :

- ▷ Les M_i sont dans $\Gamma_1 \setminus \{I\}$, et les P_i sont dans $\Gamma_2 \setminus \{I\}$.
- ▷ Pour n dans \mathbf{N}^* , on note Π_n le produit $(M_1 P_1) (M_2 P_2) \cdots (M_n P_n)$.

1. Justifier qu'un élément de Γ est de l'un des types suivants :

(0)	$U_0 = I$	(1)	$U_1 = P_0$	(2)	$U_2 = M_0$	(3)	$U_3 = P_0 M_0$
(4)	$U_4 = \Pi_n, n \geq 1$	(5)	$U_5 = P_0 \Pi_r, r \geq 1$	(6)	$U_6 = \Pi_s M_{s+1}, s \geq 1$	(7)	$U_7 = P_0 \Pi_t M_{t+1}, t \geq 1$

2. On rappelle que les matrices M_i et P_j sont *toutes* différentes de I .

- (a) Montrer que $U_3 \neq I$.
- (b) En considérant $U_6 X_2$ avec X_2 dans E_2 , montrer que $U_6 \neq I$.
- (c) Montrer que $U_5 \neq I$ (on pourra considérer une matrice semblable à U_5 afin de se ramener au **b.**).
Démontrer de même que $U_4 \neq I$.
- (d) En déduire que $U_7 \neq I$.

3. On considère le produit

$$\Pi'_n = (M'_1 P'_1) (M'_2 P'_2) \cdots (M'_n P'_n)$$

où $n \geq 1$, les M'_i sont dans $\Gamma_1 \setminus \{I\}$, et les P'_i sont dans $\Gamma_2 \setminus \{I\}$.

- (a) Établir que l'égalité $\Pi_n = \Pi'_n$ impose $M_i = M'_i$ et $P_i = P'_i$ pour tout $i, 1 \leq i \leq n$ (on pourra considérer la matrice $\Pi'_n \Pi_n^{-1}$).
- (b) En considérant $S = \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}$, en déduire que le groupe Γ est à croissance exponentielle.
Quelle est la croissance du groupe $SL_2(\mathbf{Z})$?

C. Éléments d'ordre fini de Γ

On se propose de montrer que I est le seul élément d'ordre *fini* de Γ .

Soit $(U, k) \in \Gamma \times \mathbf{N}^*$ tel que $U^k = I$.

1. Montrer que U ne peut pas être du type U_4, U_7 ou U_3 .
2. On suppose que U est du type U_6 .
 - (a) En considérant les éléments $V_1 = M_{s+1}U_6M_{s+1}^{-1}, V_2 = P_1^{-1}V_1P_1$, montrer que l'on a, successivement, $M_{s+1}M_1 = I$, puis $P_sP_1 = I$.
 - (b) Relever alors une contradiction.
3. En déduire que U ne peut pas être de type U_5 .
4. Conclure que $U = I$.

D. Conclusion

Grâce aux résultats du **B.2.** et par des calculs analogues à ceux du **B.3.** on pourrait montrer que :

- (1) Pour chacun des types rencontrés au **B.1.**, l'écriture est *unique*.
- (2) Un élément de Γ ne peut être que d'*un seul type*.

Dans la suite, le candidat pourra utiliser librement ces résultats.

▷ Lorsque $\mathcal{M} \subset \Gamma$ et $V \in \Gamma$, on pose $V\mathcal{M} = \{VU, U \in \mathcal{M}\}$.

Démontrer l'existence de quatre parties $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ de Γ , non vides et deux à deux disjointes, telles que

$$\Gamma = \mathcal{Q}_1 \cup A\mathcal{Q}_2 \quad \text{et} \quad \Gamma = \mathcal{R}_1 \cup B\mathcal{R}_2.$$

Partie V : Ensembles G -paradoxaux

Rappels

▷ Une opération ou action d'un groupe (G, \cdot) , de neutre noté 1 , sur un ensemble non vide E est la donnée d'une application $\star : G \times E \rightarrow E$ telle que :

- (i) $\forall (g', g, x) \in G \times G \times E, \quad g' \star (g \star x) = (g'g) \star x;$
- (ii) $\forall x \in E, 1 \star x = x.$

▷ les G -orbites de E sont alors les ensembles $\mathcal{O}_x = \{g \star x, g \in G\}$ pour x dans E , elles constituent une partition de E .

Si le groupe G opère sur E on le fait aussi opérer de manière naturelle sur l'ensemble des parties de E en posant

$$\forall g \in G, \quad \forall X \subset E, \quad g \star X = \{g \star x, x \in X\}.$$

Définition

Avec les notations précédentes, on convient de dire qu'une partie \mathcal{P} de E est G -*paradoxe* lorsqu'elle contient des parties \mathcal{Q} et \mathcal{R} non vides et disjointes pour lesquelles il existe :

1. Des entiers $m, n \geq 1$;
2. des partitions de \mathcal{Q} et \mathcal{R} , $(\mathcal{Q}_i)_{1 \leq i \leq m}, (\mathcal{R}_j)_{1 \leq j \leq n}$;
3. des suites finies d'éléments de $G, (g_i)_{1 \leq i \leq m}, (h_j)_{1 \leq j \leq n}$ vérifiant

$$\mathcal{P} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} g_i \star \mathcal{Q}_i \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \bigcup_{1 \leq j \leq n} h_j \star \mathcal{R}_j.$$

Autrement dit, et de façon imagée, \mathcal{P} est G -paradoxe lorsqu'elle contient des parties non vides et disjointes \mathcal{Q} et \mathcal{R} , chacune pouvant être découpée en un nombre fini de morceaux puis réarrangée sous l'action de G de manière à reconstituer \mathcal{P} .

A. Exemples

1. Définir une opération du groupe Γ de la partie **IV.** sur l'ensemble Γ de sorte que Γ soit un ensemble Γ -paradoxal.
2. Soit E un ensemble non vide, et G un sous-groupe de \mathfrak{S}_E ; montrer que toute partie G -dédoublable de E est G -paradoxale pour une action de G qui est à préciser.

Commentaire : En adaptant de façon mineure l'argumentation proposée au **III.** on pourrait montrer le résultat suivant [W. SIERPINSKI 1954] :

\mathbf{R} ne contient aucune partie \mathfrak{I}_1 -paradoxale.

3. On suppose que le groupe Γ opère sur un ensemble non vide E , et que l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$\forall U \in \Gamma \setminus \{I\}, \quad \forall x \in E, \quad U \star x \neq x.$$

Montrer que l'ensemble E est Γ -paradoxal.

Indication : On pourra considérer une partie T de E telle que l'intersection de T avec chacune des G -orbites est un singleton, et l'on ne soulèvera pas de difficulté relative à l'existence d'une telle partie.

B. Le plan hyperbolique est Γ -paradoxal

| On note $H^2 = \{x \in \mathbf{C}, \text{Im}(x) > 0\}$ (le demi-plan de POINCARÉ).

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathbf{Z})$; montrer que l'on définit une bijection h_M de H^2 sur lui-même en posant :

$$\forall x \in H^2, \quad h_M(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

| Dans la suite on pourra utiliser sans justification le fait que l'application $M \mapsto h_M$ définit un morphisme du groupe $(SL_2(\mathbf{Z}), \cdot)$ vers le groupe symétrique $(\mathfrak{S}_{H^2}, \circ)$.

2. (a) Montrer que le noyau du morphisme cité ci-dessus est $\{\pm I\}$.
(b) Montrer que ce morphisme induit un isomorphisme du sous-groupe Γ sur son image, que l'on notera $\bar{\Gamma}$.
3. Soit M dans $SL_2(\mathbf{Z})$ tel que l'homographie h_M fixe au moins un point de H^2 .
(a) Établir l'alternative : $(|\text{tr}(M)| < 2 \quad \text{ou bien} \quad h_M = Id)$.
(b) Prouver que h_M est d'ordre fini dans le groupe $(\mathfrak{S}_{H^2}, \circ)$.
4. Démontrer qu'aucun élément de $\bar{\Gamma} \setminus \{Id\}$ n'a de point fixe dans H^2 .
5. Prouver que le demi-plan de POINCARÉ est Γ -paradoxal pour une opération de Γ que l'on précisera.

C. Une partie de \mathbf{R}^2 bornée et Γ -paradoxe

- ▷ On note Δ la partie $[0, 1]^2$ de \mathbf{R}^2 . On rappelle que l'on définit une relation d'équivalence, notée \sim , en posant :

$$\forall p, q \in \mathbf{R}^2, \quad p \sim q \iff p - q \in \mathbf{Z}^2.$$

De plus Δ rencontre chaque classe d'équivalence selon un singleton.

Lorsque $p \in \mathbf{R}^2$, on note \widehat{p} l'unique q de Δ tel que $p \sim q$.

- ▷ Pour $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans Γ et $p = (x, y)$ dans \mathbf{R}^2 , on pose

$$U \star p = (ax + by, cx + dy).$$

On admettra sans justification que l'on définit ainsi une opération du groupe Γ sur l'ensemble \mathbf{R}^2 , et que, si l'on note γ_U la bijection $p \mapsto U \star p$ de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^2 , l'ensemble $\Gamma_g = \{\gamma_U, U \in \Gamma\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\mathbf{R}^2}$, version *géométrique* du groupe Γ .

1. Établir que :

$$\forall \gamma \in \Gamma_g, \quad \forall p, q \in \mathbf{R}^2, \quad p \sim q \implies \gamma(p) \sim \gamma(q).$$

2. Lorsque $\gamma \in \Gamma_g$, on définit une application $\widehat{\gamma}$ de Δ dans Δ en posant, pour tout p de Δ , $\widehat{\gamma}(p) = \widehat{\gamma(p)}$.

Montrer que l'application $\gamma \mapsto \widehat{\gamma}$ est un morphisme injectif du groupe (Γ_g, \circ) dans le groupe $(\mathfrak{S}_\Delta, \circ)$ des bijections de Δ . On note $\widehat{\Gamma}_g$ son image.

3. Démontrer que $\widehat{\Gamma}_g$ est un ensemble dénombrable.

4. On s'intéresse à l'ensemble $F = \{p \in \Delta, \exists \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}_g \setminus \{Id\}, \widehat{\gamma}(p) = p\}$.

On note C_0 un cercle donné contenu dans Δ , et de rayon strictement positif. On rappelle que \mathbf{R} n'est pas dénombrable.

(a) Montrer que si $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de droites affines de \mathbf{R}^2 , on a $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (C_0 \cap \mathcal{D}_n) \neq C_0$.

(b) En discutant l'équation $\widehat{\gamma}(p) = p$ selon la nature de γ (élément de $\Gamma_g \setminus \{Id\}$), montrer que $C_0 \cap F \neq C_0$.

5. En déduire que F est une partie d'intérieur vide dans \mathbf{R}^2 .

6. Montrer que l'on peut faire opérer le groupe Γ sur la partie *bornée* non vide $\mathcal{P} = \Delta \setminus F$ de telle sorte que :

\mathcal{P} soit un ensemble Γ -paradoxal.