

**Agrégation interne  
et CAERPA de Mathématiques**

**Première épreuve écrite**

Session 2005

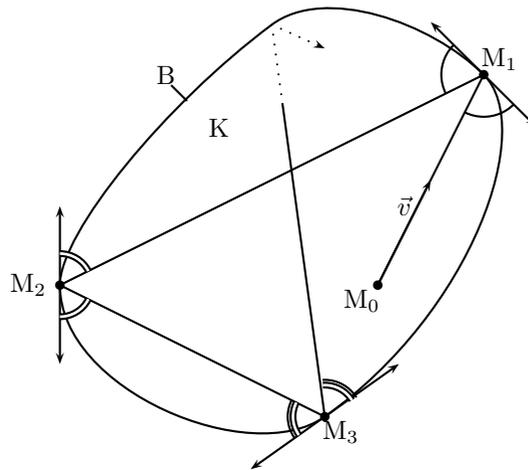
## Préambule

On note  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$  l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres réels et des nombres complexes respectivement.

On désigne par  $\mathcal{P}$  le plan affine euclidien  $\mathbf{R}^2$  muni du produit scalaire euclidien usuel  $\langle, \rangle$  et de la norme associée  $\| \cdot \|$ . Le plan vectoriel  $\mathbf{R}^2$  est orienté de sorte que la base canonique  $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$  soit directe. Si  $N$  et  $P$  sont deux points distincts de  $\mathcal{P}$ , on désigne par  $NP$  la droite affine passant par  $N$  et  $P$ .

Soit  $K$  une partie compacte et convexe de  $\mathcal{P}$  dont l'intérieur  $K_0$  n'est pas vide. On note  $B$  la frontière de  $K$  dans  $\mathcal{P}$ , appelée aussi *bord* de  $K$ . On admettra la propriété suivante : *une droite passant par un point de  $K_0$  rencontre  $K$  selon un segment  $[N, P]$ , et l'on a  $K_0 \cap NP = ]N, P[$  et  $B \cap NP = \{N, P\}$ .*

L'objet de ce problème est l'étude du trajet d'un rayon lumineux (ou encore d'une boule de billard assimilée à un point) issu d'un point  $M_0$  intérieur à  $K$ , dirigé par un vecteur  $\vec{v}$  donné,  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , et qui se réfléchit selon les lois de l'optique géométrique sur le bord  $B$  de  $K$ .



Plus précisément, on appelle *trajectoire* de  $(M_0, \vec{v})$  la suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  constituée de  $M_0$  et des points  $M_1, M_2, \dots$  définis, pour  $n \geq 1$ , par les quatre propriétés suivantes :

- (1) pour tout  $n \geq 1$ , le point  $M_n$  appartient à  $B$  ;
- (2) les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\overrightarrow{M_0 M_1}$  sont colinéaires de même sens ;
- (3) pour tout  $n \geq 1$ , on a  $M_{n-1} \neq M_n$  ;
- (4) la normale à  $B$  en  $M_n$  existe et c'est la bissectrice intérieure de l'angle en  $M_n$  du triangle  $M_{n-1} M_n M_{n+1}$ .

On admettra que la donnée de  $(M_0, \vec{v})$  définit (sous réserve de la condition (4)) une unique trajectoire  $(M_n)_{n \geq 0}$ .

Soit  $p$  un entier naturel non nul, on dit que la trajectoire  $(M_n)_{n \geq 0}$  est *périodique* de période  $p$  si  $M_{n+p} = M_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

**Tournez la page S.V.P.**

## I. Nombre de rotations d'une ligne polygonale fermée

Soit  $k$  un entier  $\geq 1$ . Dans tout le problème, on suppose que le bord  $B$  de l'ensemble compact convexe  $K$  est paramétré par

$$f : t \mapsto e^{it} \rho(t),$$

où  $\rho$  est une fonction de la variable réelle  $t$ , à valeurs strictement positives, de classe  $C^k$  et  $2\pi$ -périodique.

1) *Abscisse curviligne sur  $B$* . Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$g(t) = \int_0^t \sqrt{\rho(u)^2 + \rho'(u)^2} du.$$

a) Démontrer que  $g$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$ .

b) Prouver que  $g(t + 2\pi) = g(t) + g(2\pi)$  pour tout nombre réel  $t$ .

On définit un paramétrage de  $B$ , en posant, pour  $s \in \mathbf{R}$ ,

$$M(s) = (f \circ g^{-1})(s),$$

et on pose  $L = g(2\pi)$ .

c) Calculer la norme euclidienne de  $\frac{dM}{ds}(s)$  (vecteur dérivé de  $M$  par rapport à  $s$ ).

Interpréter géométriquement  $L$ .

d) Démontrer que l'application  $s \mapsto M(s)$  est  $L$ -périodique, et que  $M(s_1) = M(s_2)$  si et seulement si  $s_2 - s_1 \in L\mathbf{Z}$ .

2) *Nombre de rotations d'une ligne polygonale fermée.*

Soit  $p$  un entier  $\geq 1$  et soient  $N_1, N_2, \dots, N_{p+1}$  des points de  $B$ .

a) Choisissons un nombre réel  $s_1$  tel que  $M(s_1) = N_1$ . Démontrer qu'il existe une unique suite  $(s_2, \dots, s_{p+1})$  de nombres réels telle que  $M(s_{i+1}) = N_{i+1}$  et  $s_i \leq s_{i+1} < s_i + L$ , pour  $1 \leq i \leq p$ .

b) Supposons  $N_{p+1} = N_1$ . Prouver alors que  $m = \frac{s_{p+1} - s_1}{L}$  est un entier indépendant du choix de  $s_1$  tel que  $M(s_1) = N_1$ .

L'entier  $m$  est appelé *nombre de rotations* de la ligne polygonale fermée  $N_1, N_2, \dots, N_{p-1}, N_p, N_1$ . Comparer  $m$  et  $p$ .

3) Dessiner, sans justification, une ligne polygonale fermée de 7 sommets, inscrite dans un ensemble compact convexe du plan, dont le nombre de rotations est 3.

**Tournez la page S.V.P.**

## II. Théorème de Birkhoff

Les notations et les hypothèses sont celles du préambule et de la partie I. En particulier, on considère le paramétrage de  $B$  par  $s \mapsto M(s)$  défini dans la partie I. On suppose en outre dans cette partie que trois points distincts de  $B$  ne sont jamais alignés.

L'objet des questions qui suivent est de prouver que, si  $m$  et  $p$  sont des entiers satisfaisant à  $1 \leq m \leq p-1$ , il existe au moins une trajectoire  $(M_n)_{n \geq 0}$  périodique de période  $p$  et telle que le nombre de rotations de la ligne polygonale fermée  $M_1, M_2, \dots, M_p, M_1$  soit égal à  $m$ . Une telle trajectoire est dite de *type*  $(m, p)$  [la définition de « période » d'une trajectoire est donnée dans le Préambule, celle de « nombre de rotations » dans la question (I, 2, b)].

1) On définit une application  $\psi$  de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$  en posant

$$\psi(s, s') = \frac{\overrightarrow{M(s)M(s')}}{\|M(s)M(s')\|}.$$

On pose aussi  $\Omega = \{(s, s') \in \mathbf{R}^2 \mid (s' - s) \notin L\mathbf{Z}\}$  ; on admettra que l'ensemble  $\Omega$  est ouvert dans  $\mathbf{R}^2$ .

a) Prouver que l'application  $\psi$  est continue sur  $\mathbf{R}^2$  et de classe  $C^k$  sur  $\Omega$ .

b) Exprimer, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles de  $\psi$  à l'aide d'angles que l'on précisera.

2) On suppose  $p = 2$ .

a) Démontrer que la fonction  $\psi$  admet un maximum absolu sur  $\mathbf{R}^2$ .

b) Prouver l'existence d'une trajectoire de type  $(1, 2)$ .

3) On suppose  $p \geq 3$  et  $1 \leq m \leq p-1$ .

On désigne par  $W$  l'ensemble des points  $(s_1, \dots, s_p)$  de  $\mathbf{R}^p$  satisfaisant aux conditions

$$0 \leq s_{i+1} - s_i \leq L \text{ pour } i = 1, \dots, p-1 \quad \text{et} \quad (m-1)L \leq s_p - s_1 \leq mL.$$

On définit une fonction  $F$  sur  $W$  en posant

$$F(s_1, \dots, s_p) = \psi(s_1, s_2) + \psi(s_2, s_3) + \dots + \psi(s_{p-1}, s_p) + \psi(s_p, s_1).$$

a) Construire un élément  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  de  $W$  tel que l'ensemble constitué par les points  $M(\alpha_i)$ ,  $1 \leq i \leq p$ , possède au moins deux éléments.

b) Pour simplifier les notations, posons  $A_i = M(\alpha_i)$  pour  $1 \leq i \leq p$ .

Démontrer que si  $A_1 \neq A_2$  et  $A_2 = A_3$ , il existe un élément  $\alpha'$  de  $W$  tel que  $F(\alpha') > F(\alpha)$ .

En déduire que, si deux points consécutifs de la suite  $A_1, A_2, \dots, A_p, A_1$  sont confondus, il existe un élément  $\alpha'$  de  $W$  tel que  $F(\alpha') > F(\alpha)$ .

c) Démontrer que la fonction  $F$  admet un maximum absolu strictement positif sur  $W$ .

d) Prouver l'existence d'une trajectoire de type  $(m, p)$ .

**Tournez la page S.V.P.**

### III. Billard elliptique

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $0 < b < a$  ; posons  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . On suppose dans cette partie que le bord  $B$  de  $K$  est l'ellipse de foyers  $O$  et  $O' = O + 2c\vec{e}_1$ , de demi axes  $a$  et  $b$ .

On admettra que l'ellipse  $B$  est paramétrée par

$$f(t) = e^{it} \frac{b^2}{a - c \cos t},$$

et que  $B$  est aussi l'ensemble des points  $N$  du plan  $\mathcal{P}$  tels que  $\|\vec{ON}\| + \|\vec{O'N}\| = 2a$ .

Comme dans la partie I, on utilise le paramétrage de  $B$  par  $s \mapsto M(s)$ .

1) En dérivant l'application  $s \mapsto \|\vec{OM}(s)\| + \|\vec{O'M}(s)\|$ , démontrer que l'ellipse  $B$  possède une tangente en  $M(s)$  qui est la bissectrice extérieure du triangle  $O'M(s)O$  en  $M(s)$ . On notera  $D(s)$  cette tangente.

2) Étant donné une droite affine  $D$  de  $\mathcal{P}$ , un vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à  $D$  et un point  $P$  de la droite  $D$ , on considère le produit

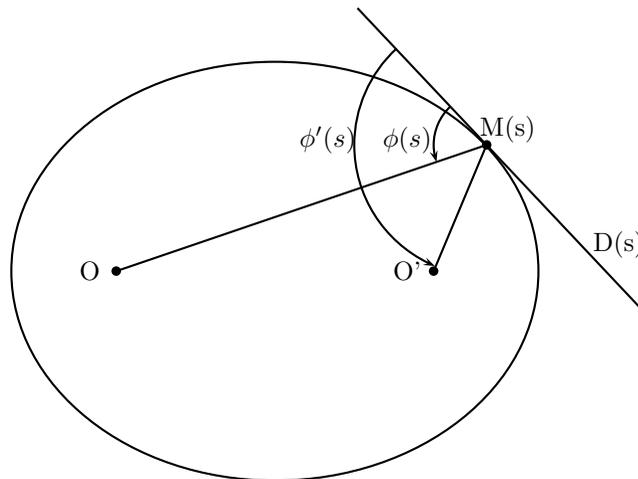
$$\mathcal{E}(D, \vec{n}, P) = \langle \vec{OP}, \vec{n} \rangle \langle \vec{O'P}, \vec{n} \rangle.$$

a) Démontrer que  $\mathcal{E}(D, \vec{n}, P)$  ne dépend pas du choix du point  $P$  de  $D$  ni du choix du vecteur normal unitaire  $\vec{n}$ .

On appelle *énergie de la droite*  $D$  par rapport aux points  $O$  et  $O'$  et on note  $\mathcal{E}(D)$  la valeur du produit  $\mathcal{E}(D, \vec{n}, P)$ .

b) Interpréter géométriquement la valeur absolue ainsi que le signe de l'énergie  $\mathcal{E}(D)$ .

3) *Énergie d'une droite*  $D(s)$  *tangente en*  $M(s)$  *à l'ellipse*  $B$ . On rappelle que, pour  $s \in \mathbf{R}$ , on note  $D(s)$  la tangente à l'ellipse  $B$  au point  $M(s)$ . On note respectivement  $\phi(s)$  et  $\phi'(s)$  les mesures appartenant à l'intervalle  $[0, \pi]$  des angles orientés de droites  $(D(s), M(s)O)$  et  $(D(s), M(s)O')$ .



**Tournez la page S.V.P.**

a) Déterminer quelle relation lie  $\phi(s)$  et  $\phi'(s)$  ? En déduire une expression de l'énergie  $\mathcal{E}(D(s))$  en fonction de  $\phi(s)$ , de  $\|\overrightarrow{OM(s)}\|$  et de  $\|\overrightarrow{O'M(s)}\|$ .

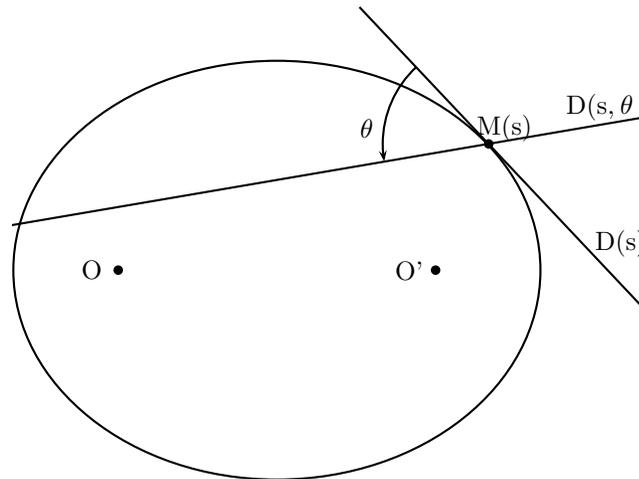
b) Démontrer l'égalité  $\mathcal{E}(D(s)) = b^2$ .

4) a) Déduire des résultats précédents une relation liant  $b$ ,  $\sin \phi(s)$ ,  $\|\overrightarrow{OM(s)}\|$  et  $\|\overrightarrow{O'M(s)}\|$ .

b) On désigne par  $L$  le périmètre de l'ellipse  $B$  (on ne cherchera pas à calculer  $L$ ). Pour  $s \in \mathbf{R}$ , on pose  $h(s) = (\sin \phi(s))^2$ . Démontrer que la fonction  $h$  est  $L$ -périodique, de classe  $C^\infty$ , et donner le tableau de ses variations sur l'intervalle  $[0, L]$ .

5) *Énergie d'une droite*  $D(s, \theta)$  issue d'un point  $M(s)$ . Pour  $s \in \mathbf{R}$  et  $\theta \in [0, \pi]$ , on note  $D(s, \theta)$  la droite issue du point  $M(s)$  telle que

$$(D(s), D(s, \theta)) \equiv \theta \pmod{\pi}.$$



Démontrer que l'énergie  $\mathcal{E}(D(s, \theta))$  a pour expression

$$\mathcal{E}(D(s, \theta)) = b^2 \frac{(\cos \theta)^2 - (\cos \phi(s))^2}{(\sin \phi(s))^2}.$$

6) *Étude de*  $E(s, u)$ .

Pour  $s \in \mathbf{R}$  et  $u \in [-1, 1]$ , on pose  $E(s, u) = \mathcal{E}(D(s, \arccos u))$ , de sorte que l'on a

$$E(s, u) = \frac{b^2}{(\sin \phi(s))^2} (u^2 - (\cos \phi(s))^2).$$

Déterminer les extrema globaux de la fonction  $E$  sur  $\mathbf{R} \times [-1, 1]$ . A quelles droites  $D(s, \theta)$  correspondent-ils ?

7) Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une trajectoire et soit  $E_0$  l'énergie de la droite  $M_0M_1$ .

a) Démontrer que, pour tout  $n \geq 0$ , l'énergie de la droite  $M_nM_{n+1}$  vaut  $E_0$ .

b) On suppose  $E_0 > 0$  ; démontrer qu'alors les droites  $M_nM_{n+1}$ , pour  $n \geq 0$ , sont toutes tangentes à une même ellipse que l'on déterminera.

**Tournez la page S.V.P.**

#### IV. La transformation T

Les hypothèses et les notations sont celles de la partie III.

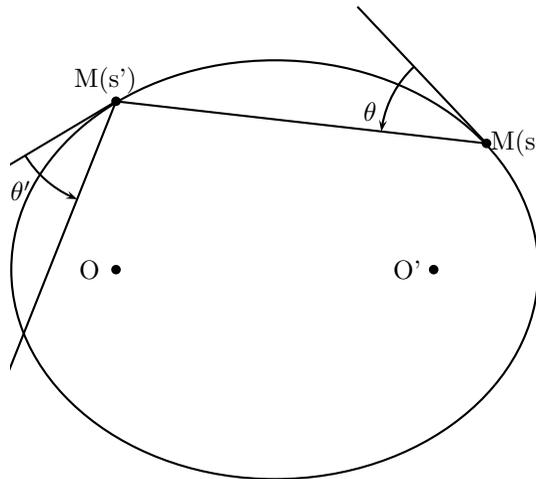
Comme dans la question (III.5), pour tout couple  $(s, u) \in \mathbf{R} \times ]-1, 1[$ , on pose  $\theta = \arccos u$  et on considère la droite  $D(s, \theta)$  issue du point  $M(s)$  telle que

$$(D(s), D(s, \theta)) \equiv \theta \pmod{\pi}.$$

Cette droite recoupe l'ellipse B en un point  $M(s')$ , où  $0 < s' - s < L$ , et se réfléchit selon les lois de l'optique géométrique en une droite  $D(s', \theta')$ , où  $\theta'$  est la mesure appartenant à l'intervalle  $]0, \pi[$  de l'angle orienté de droites  $(D(s'), D(s', \theta'))$ . On pose  $u' = \cos \theta'$  et on définit l'application T de  $\mathbf{R} \times ]-1, 1[$  dans lui-même par

$$T(s, u) = (s', u') = (T_1(s, u), T_2(s, u)).$$

On admettra que l'application T est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R} \times ]-1, 1[$ .



On considère dans cette partie, la fonction  $\psi$  définie dans la question (II.1) et la fonction E définie dans la question (III.6).

1) Démontrer que la fonction E est invariante par T.

2) On définit deux fonctions  $G_1$  et  $G_2$  sur  $\Omega' = \{(s, s') \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < s' - s < L\}$  par

$$G_1(s, s') = \left(s, -\frac{\partial \psi}{\partial s}(s, s')\right), \quad G_2(s, s') = \left(s', \frac{\partial \psi}{\partial s'}(s, s')\right).$$

On admettra que  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial s'}$  ne s'annule jamais.

a) Démontrer l'égalité  $T \circ G_1 = G_2$ .

b) En déduire la valeur du déterminant jacobien de T.

3) a) Démontrer qu'il existe une fonction  $U : \mathbf{R} \times ]0, b^2[ \rightarrow ]0, 1[$ , de classe  $C^\infty$ , telle que

$$E(s, U(s, r)) = r \quad \text{pour tout } (s, r) \in \mathbf{R} \times ]0, b^2[.$$

**Tournez la page S.V.P.**

b) Pour  $(s, r) \in \mathbf{R} \times ]0, b^2[$ , posons  $J(s, r) = (s, U(s, r))$ . En admettant que  $T_2(s, U(s, r))$  est toujours positif, démontrer que, pour  $s \in \mathbf{R}$  et  $0 < r < b^2$ , on a l'égalité

$$(T \circ J)(s, r) = J(T_1(s, U(s, r)), r).$$

c) Soit  $E_0$  un nombre réel tel que  $0 < E_0 < b^2$ . Pour  $s \in \mathbf{R}$ , on pose

$$\mu(s) = \frac{\partial U}{\partial r}(s, E_0), \quad \nu(s) = T_1(s, U(s, E_0)).$$

Démontrer que, pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , on a

$$\mu(s) = (\mu \circ \nu)(s) \nu'(s).$$

4) On suppose toujours  $0 < E_0 < b^2$ . On désigne par  $B'$  l'ellipse de foyers  $O$  et  $O'$ , dont le demi petit axe vaut  $b' = \sqrt{E_0}$ . Pour  $s \in \mathbf{R}$ , on pose

$$\chi(s) = \int_0^s \mu(t) dt.$$

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel  $\chi_0$  (ne dépendant que de  $E_0$ ) tel que, pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , on ait

$$\chi(\nu(s)) = \chi(s) + \chi_0.$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur  $\chi_0$  et  $\chi(L)$ , pour qu'il existe une trajectoire périodique  $(M_n)_{n \geq 0}$ , pour laquelle toutes les droites  $M_n M_{n+1}$ ,  $n \geq 0$ , sont tangentes à l'ellipse  $B'$ .

b) Réciproquement, démontrer que si cette condition est remplie, toute trajectoire  $(M_n)_{n \geq 0}$ , pour laquelle toutes les droites  $M_n M_{n+1}$ ,  $n \geq 0$  sont tangentes à l'ellipse  $B'$ , est une trajectoire périodique.

————— o o o —————