Notations et rappels

On désigne respectivement par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des entiers naturels, l'anneau des entiers relatifs et le corps des nombres complexes. On désigne par $\mathbb{C}[X]$ la $\mathbb{C}$-algèbre des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \leqslant j$, on désigne par $[\![i, j]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre i et j.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathrm{End}(E)$ l'algèbre des endomorphismes linéaires de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des automorphismes linéaires de E. Pour $f \in \mathrm{End}(E)$, la trace de f est notée $\mathrm{Tr}(f)$.

Soit G un groupe fini. Son ordre (c'est-à-dire son cardinal) esr noté $|G|$.

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et x un élément de G. Le sous-groupe de G engendré par x est noté $\langle x \rangle$.

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Le groupe quotient de G par H est noté G/H.

Pour n un entier naturel non nul, on désigne par $\mathfrak{S}_n$ le n-ième groupe symétrique, c'est-à-dire le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Dans tout le sujet, les éléments de $\mathbb{C}^n$, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, seront notés sous forme de vecteurs colonnes.

On rappelle le résultat suivant :

Lemme 1. ***(Lemme des noyaux)***. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $f \in \mathrm{End}(E)$ et $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes deux-à-deux premiers entre eux. On pose*

$$P = \prod_{i=1}^{k} P_i.$$

Alors

$$\mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}(P_1(f)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(f)).$$

Ce problème est découpé en six parties. La première partie est formée de trois exercices préliminaires. Les parties suivantes sont consacrées à l'étude des représentations des groupes finis et en particulier à l'établissement des théorèmes de Maschke et de Kronecker.

Première partie

Cette première partie contient trois exercices dont les résultats pourront être utilisés dans les parties suivantes.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Les réponses devront être soigneusement justifiées.
   (a) Tout endomorphisme de E est diagonalisable.
   (b) Soient f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Il existe un sous-espace vectoriel F' de E stable par f tel que $E = F \oplus F'$.
   (c) Soit f un endomorphisme de E diagonalisable. Alors f^2 est diagonalisable.
   (d) Soit f un endomorphisme de E tel que f^2 est diagonalisable. Alors f est diagonalisable.
   (e) Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f désigne un endomorphisme de E.

2. **(Question de cours)**. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est diagonalisable.
   (b) f est annulé par un polynôme P dont les racines sont toutes de multiplicité 1.
   (c) Les racines du polynôme minimal de f sont toutes de multiplicité 1.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On considère l'endomorphisme $f_{|F}$ de F, défini par
$$f_{|F} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right.$$
   Montrer que si f est diagonalisable, alors $f_{|F}$ est diagonalisable.
4. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f_1, \dots, f_k$ des endomorphismes de E, où k est un entier naturel non nul. On suppose que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, f_i est diagonalisable et que pour tous $i, j \in [\![1,k]\!]$, $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$.
   (a) On suppose dans cette question que $k \geqslant 2$. Soit F un sous-espace propre de f_k. Montrer que F est stable par $f_1, \dots, f_{k-1}$.
   (b) On suppose dans cette question que $k \geqslant 2$. Montrer que pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, l'endomorphisme de F induit par f_i est diagonalisable.
   (c) Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à $f_1, \dots, f_k$.

Exercice 3

Définition 2. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien fini. L'exposant de G est le plus petit multiple commun (PPCM) des ordres des éléments de G. On le note* $\exp(G)$.

Dans tout cet exercice, $(G, \cdot)$ désigne un groupe abélien fini. Le but de l'exercice est de montrer que G possède un élément d'ordre $\exp(G)$.

5. Soit g un élément de G, dont l'ordre est noté n et soit $d \in \mathbb{N}$, divisant n. Déterminer l'ordre de g^d.
6. Soit g un élément de G, dont l'ordre est noté n et soit $d \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ordre de g^d.
7. Soient g et h deux éléments de G, d'ordre respectif k et l premiers entre eux.
   (a) Montrer que $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle$ est réduit à l'élément neutre de G.
   (b) En déduire l'ordre de $g \cdot h$.
8. Soient $g_1, \ldots, g_n$ des éléments de G, d'ordre respectif $k_1, \ldots, k_n$ deux-à-deux premiers entre eux. Montrer que l'ordre de $g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$ est $k_1 \ldots k_n$.
9. On décompose l'exposant de G en produit de nombres premiers, sous la forme

$$\exp(G) = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

avec $p_1, \ldots, p_n$ des nombres premiers deux-à-deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des entiers supérieurs ou égaux à 1.
   (a) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que G possède un élément d'ordre un multiple de $p_i^{\alpha_i}$ puis que G possède un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$.
   (b) Montrer que G a un élément d'ordre $\exp(G)$.

Deuxième partie : définition et exemples

Définition 3. *Soient $(G, \cdot)$ un groupe (non nécessairement fini) et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel* ***de dimension finie****. Une représentation de G d'espace E est un homomorphisme de groupes θ de G dans $\mathrm{GL}(E)$.*

On notera que les espaces des représentations que l'on considèrera par la suite sont toujours de dimension finie.

10. *Quelques exemples.*
   (a) Soit θ une représentation d'un groupe $(G, \cdot)$ d'espace E.
      i. Déterminer $\theta(e_G)$, où e_G est l'élément neutre du groupe $(G, \cdot)$.
      ii. Pour $g \in G$, déterminer $\theta(g^{-1})$ en fonction de $\theta(g)$.
   (b) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et f un automorphisme de E. Montrer que l'application suivante est une représentation du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ d'espace E :

$$\theta_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ k & \longmapsto & f^k. \end{array} \right.$$

   (c) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de E tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$. Montrer que l'application suivante est une représentation du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ d'espace E :

$$\theta_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ \bar{k} & \longmapsto & f^k. \end{array} \right.$$

   (d) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, soit f_λ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \qquad f_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}.$$

   Montrer que l'application suivante est une représentation du groupe $(\mathbb{C}, +)$ d'espace $\mathbb{C}^2$:

$$\theta_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2) \\ \lambda & \longmapsto & f_\lambda. \end{array} \right.$$

 Tournez la page S.V.P.

(e) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \qquad g_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ x_{\sigma^{-1}(2)} \\ x_{\sigma^{-1}(3)} \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'application suivante est une représentation du groupe $\mathfrak{S}_3$ d'espace $\mathbb{C}^3$:

$$\theta_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_3 & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3) \\ \sigma & \longmapsto & g_\sigma. \end{array} \right.$$

Définition 4. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe $(G, \cdot)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est un sous-espace invariant de θ si pour tout $g \in G$,*

$$\theta(g)(F) \subseteq F.$$

11. (a) Montrer que si F est un sous-espace invariant de θ, alors pour tout $g \in G$, $\theta(g)$ induit une bijection de F dans F. *Par abus de notation, cette bijection sera notée $\theta(g)_{|F}$.*

   (b) Montrer que si F est un sous-espace invariant de θ, alors l'application suivante est une représentation de G :

$$\theta_{|F} : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(F) \\ g & \longmapsto & \theta(g)_{|F}. \end{array} \right.$$

   (c) Déterminer les sous-espaces invariants de la représentation θ_3 du groupe $\mathbb{C}$.
   Indication : on pourra considérer les espaces propres de l'endomorphisme $\theta_3(1)$.

   (d) On considère la représentation θ_4 de $\mathfrak{S}_3$.

      i. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrer que F est sous-espace invariant de θ_4.

      ii. Déterminer une base de F et déterminer les matrices de $\theta_{4|F}(\sigma)$ dans cette base pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$.

      iii. Déterminer un sous-espace F' invariant de θ, supplémentaire de F dans E.

Définition 5. *Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ deux représentations d'un même groupe G. Un homomorphisme de représentations de θ vers θ' est une application linéaire $f : E \longrightarrow E'$ telle que pour tout $g \in G$, $f \circ \theta(g) = \theta'(g) \circ f$. Si de plus f est bijective, on dira que f est un isomorphisme de représentations de θ vers θ'. Enfin, on dira que θ et θ' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de représentations de θ vers θ'.*

12. Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ deux représentations d'un même groupe G et f un homomorphisme de représentations de θ vers θ'.

   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace invariant de θ.

   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace invariant de θ'.

   (c) On suppose que $E = E'$ et que $\theta = \theta'$. Montrer que les espaces propres de f sont des sous-espaces invariants de θ.

Définition 6. *Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe fini G. On dira que θ est irréductible si E est non nul et si les seuls espaces invariants de θ sont E et $\{0_E\}$.*

13. Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ deux représentations irréductibles d'un même groupe fini G et f un homomorphisme de représentations de θ vers θ'.

    (a) ***(Lemme de Schur)***.

    i. Montrer que f est soit nul, soit un isomorphisme.

    ii. Dans le cas particulier où $\theta = \theta'$, montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.

    (b) Soit $h : E \longrightarrow E'$ une application linéaire quelconque.

    i. Montrer que l'application suivante est un homomorphisme de représentations de θ vers θ' :

    $$f = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta'(g) \circ h \circ \theta(g^{-1}).$$

    ii. Montrer que si θ et θ' ne sont pas isomorphes, alors $f = 0$.

    iii. Dans le cas particulier où $\theta = \theta'$, montrer que

    $$f = \frac{\mathrm{Tr}(h)}{\dim(E)} \mathrm{Id}_E.$$

    Indication : on pourra d'abord montrer que f est un multiple de Id_E puis considérer sa trace.

Troisième partie : théorème de Maschke

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 7. ***(Théorème de Maschke)***. *Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe fini d'espace E. Il existe des sous-espaces invariants $F_1, \ldots, F_k$ de θ tels que :*
— $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$.
— *Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la représentation $\theta_{|F_i}$ est irréductible.*

14. Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe fini G et F un sous-espace invariant de θ.

    (a) Justifier l'existence d'un supplémentaire F' de F dans E.

    (b) Soit p la projection sur F parallèlement à F'. On considère l'endomorphisme de E défini par

    $$q = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta(g) \circ p \circ \theta(g^{-1}).$$

    (c) Montrer que pour tout $x \in F$, $q(x) = x$.

    (d) Montrer que $\mathrm{Im}(q) = F$ puis que q est une projection sur F.

    (e) Montrer que q est un homomorphisme de représentations de θ vers elle-même.

    (f) Montrer que $\mathrm{Ker}(q)$ est un sous-espace invariant de θ et que $E = F \oplus \mathrm{Ker}(q)$.

15. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation de G dont l'espace E est de dimension 1. Montrer que θ est irréductible.

16. Démontrer le théorème de Maschke. *Indication :* on pourra procéder par récurrence sur la dimension de E.

 Tournez la page S.V.P.

Quatrième partie : le cas des groupes abéliens finis

Dans toute cette partie, G désigne un groupe abélien fini. Son ordre est noté N.

17. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation irréductible de G d'espace E.
    (a) Montrer que pour tout $g \in G$, $\theta(g)^N = \mathrm{Id}_E$. En déduire que pour tout $g \in G$, $\theta(g)$ est diagonalisable.
    (b) Montrer que les endomorphismes $\theta(g)$ de E, où g parcourt G, ont un vecteur propre commun.
    (c) En déduire que E est de dimension 1.
18. Justifier que lorsque E est de dimension 1, alors $\mathrm{GL}(E)$ est isomorphe au groupe $\mathbb{C}^*$.

Définition 8. *Soit G un groupe abélien fini. L'ensemble des homomorphismes de G dans $\mathbb{C}^*$ est noté $\widehat{G}$. Les éléments de $\widehat{G}$ sont appelés les caractères de G.*

Ainsi, les représentations irréductibles de G s'identifient aux caractères de G.

19. Montrer que l'application suivante munit $\widehat{G}$ d'une loi de groupe abélien :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \widehat{G} \times \widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{G} \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \cdot \beta : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ g & \longmapsto & \alpha(g)\beta(g). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ainsi, $(\widehat{G}, \cdot)$ est un groupe abélien, appelé groupe des caractères de G.

20. On suppose dans cette question que G est le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
    (a) Montrer que l'application suivante est un élément de $\widehat{G}$:

$$\alpha_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \overline{k} & \longmapsto & \mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}. \end{array} \right.$$

    (b) Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe cyclique d'ordre n, engendré par α_1.
    Indication : si $\alpha \in \widehat{G}$, on pourra considérer $\alpha(\overline{1})$.
21. Déterminer $\widehat{G}$ lorsque G est le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cinquième partie : prolongement des caractères et théorème de Kronecker

Dans toute cette partie, G désigne un groupe abélien fini.

22. Soit H un sous-groupe de G et soit $\alpha \in \widehat{H}$. Le but de cette question est de montrer qu'il existe $\alpha' \in \widehat{G}$ tel que $\alpha'_{|H} = \alpha$.
    (a) On supppose H est différent de G. Soit alors x un élement de G n'appartenant pas à H. On considère le sous-groupe K de G engendré par les éléments de H et par x. Montrer que

$$K = \{hx^p \mid h \in H,\ p \in \mathbb{Z}\}$$

    et en déduire que K/H est un groupe cyclique non nul.
    L'ordre de K/H sera noté r.
    (b) Montrer que tout élément g de K s'écrit de façon unique $g = hx^p$, avec $h \in H$ et $p \in [\![0, r-1]\!]$.

(c) Justifier que $x^r \in H$.
On pose alors $z = \alpha(x^r)$.

(d) Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que $\omega^r = z$. Pour $h \in H$ et $p \in [\![0, r-1]\!]$, on pose $\tilde{\alpha}(hx^p) = \alpha(h)\omega^p$. Montrer que cela définit un caractère $\tilde{\alpha} \in \widehat{K}$ prolongeant α de H à K.

(e) Conclure. *Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur $[G : H] = \dfrac{|G|}{|H|}$.

23. *Le but de cette question est de démontrer que* $|G| = |\widehat{G}|$.

(a) Conclure lorsque G est cyclique.

(b) On suppose G non cyclique. Soit x un élément de G différent de l'élément neutre et soit $H = \langle x \rangle$. Montrer que l'application suivante est un homomorphisme surjectif de groupes :

$$\theta : \begin{cases} \widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{H} \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_{|H}. \end{cases}$$

(c) Soit $\alpha \in \mathrm{Ker}(\theta)$. On pose

$$\overline{\alpha} : \begin{cases} G/H & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \overline{g} & \longmapsto & \alpha(g). \end{cases}$$

Montrer que $\overline{\alpha}$ est une application bien définie et qu'il s'agit d'un élément de $\widehat{G/H}$.

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(\theta)$ est isomorphe à $\widehat{G/H}$.

(e) Conclure.

Le but de la question 24 est de démontrer le théorème suivant :

Theorème 9. ***(Théorème de Kronecker).*** *Si G est un groupe abélien fini non réduit à son élément neutre, alors il existe des entiers naturels* $N_1, \ldots, N_k \geqslant 2$, *avec* N_k *divisant* N_{k-1}, …, N_2 *divisant* N_1, *tels que G est isomorphe au groupe*

$$\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}/N_k\mathbb{Z}$$

Une telle écriture (dont on peut montrer qu'elle est unique) s'appelle décomposition de Kronecker de G.

24. *On considère dans cette question un groupe abélien G fini. Son exposant (voir la première partie) est noté N. D'après la première partie, G possède un élément x d'ordre N. On pose* $H = \langle x \rangle$.

(a) Justifier que H possède un caractère $\alpha \in \widehat{H}$ injectif.

(b) Justifier qu'il existe $\beta \in \widehat{G}$ tel que $\beta_{|H} = \alpha$.

(c) Monter que $\beta(G) = \alpha(H) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^N = 1\}$.

(d) Justifier que l'exposant de $\mathrm{Ker}(\beta)$ divise N.

(e) Montrer G est isomorphe à $H \times \mathrm{Ker}(\beta)$.

(f) Conclure.

25. Donner une décomposition de Kronecker du groupe abélien $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

 Tournez la page S.V.P.

Sixième partie : applications centrales

Définition 10. *Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini. Une application λ de G dans $\mathbb{C}$ est dite centrale si pour tous $g,h\in G$, $\lambda(g\cdot h)=\lambda(h\cdot g)$. L'ensemble des applications centrales de G est noté $\mathcal{C}(G)$.*

Dans toute cette partie, on considère un groupe fini $(G,\cdot)$.

26. (a) Montrer que $\mathcal{C}(G)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de G dans $\mathbb{C}$.
    (b) Soit $\lambda : G \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. Montrer que λ est centrale si, et seulement si, elle est constante sur chaque classe de conjugaison de G.
    (c) Soit C une classe de conjugaison de G. On considère l'application

$$\iota_C : \left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } g\in C, \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}\end{array}\right.$$

    Montrer que ces applications forment une base de $\mathcal{C}(G)$. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(G)$.

27. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation de G.
    (a) Montrer que l'application suivante est centrale :

$$\chi_\theta : \left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & \mathrm{Tr}(\theta(g)).\end{array}\right.$$

    (b) Montrer que pour tout $g\in G$, $\theta(g)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.
    (c) En déduire que pour tout $g\in G$, $\chi_\theta(g^{-1})=\overline{\chi_\theta(g)}$.

28. Pour tous $\lambda,\mu\in\mathcal{C}(G)$, on pose

$$\langle\lambda,\mu\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\lambda(g)}\mu(g).$$

    Montrer que cela définit une forme hermitienne définie positive sur $\mathcal{C}(G)$.

29. Soient $\theta : G\longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G\longrightarrow\mathrm{GL}(E')$ deux représentations irréductibles d'un même groupe G. La dimension de E est notée n et la dimension de E' est notée n'. On fixe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et E'. Pour tout $g\in G$, la matrice de $\theta(g)$ dans la base $\mathcal{B}$ est notée $M_{\mathcal{B}}(\theta(g))$, la matrice de $\theta'(g)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est notée $M_{\mathcal{B}'}(\theta'(g))$ et on pose

$$M_{\mathcal{B}}(\theta(g))=(a_{i,j}(g))_{1\leqslant i,j\leqslant n},\qquad M_{\mathcal{B}'}(\theta'(g))=(a'_{k,l}(g))_{1\leqslant k,l\leqslant n'}.$$

    (a) Exprimer $\langle\chi_{\theta'},\chi_\theta\rangle$ en fonction des coefficients $a_{i,j}(g)$ et $a'_{k,l}(g)$ des matrices $M_{\mathcal{B}}(\theta(g))$ et $M_{\mathcal{B}'}(\theta'(g))$.
    (b) Soit $X=(x_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n',\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\in M_{n',n}(\mathbb{C})$ une matrice et $h : E\longrightarrow E'$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est X. On pose

$$f=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\theta'(g)\circ h\circ\theta(g^{-1}).$$

    Exprimer les coefficients de la matrice $Y=(y_{i,l})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n',\\ 1\leqslant l\leqslant n}}$ de la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
    (c) On suppose que θ et θ' ne sont pas isomorphes. Montrer que pour tous $i,j\in[\![1,n']\!]$, pour tous $k,l\in[\![1,n]\!]$,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}a'_{i,j}(g)a_{k,l}(g^{-1})=0.$$

    En déduire que $\langle\chi_\theta,\chi_{\theta'}\rangle=0$. *Indication* : on pourra utiliser le lemme de Schur.

(d) On suppose que $E = E'$ et que $\theta = \theta'$. Dans ce cas, on prend $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

i. Montrer que pour $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a'_{i,j}(g) a_{k,l}(g^{-1}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } i = l \text{ et } j = k, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Indication : on pourra utiliser le lemme de Schur.

ii. En déduire que $\langle \chi_\theta, \chi_{\theta'} \rangle = 1$.

(e) Soient $\theta_1, \ldots, \theta_k$ des représentations irréductibles de G, deux-à-deux non isomorphes. Montrer que $(\chi_{\theta_i})_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(G)$ et en déduire une majoration de k.

Ainsi, le nombre de représentations irréductibles de G à isomorphisme près est fini.

30. Montrer que si G est abélien, le nombre de représentations irréductibles à isomorphisme près de G est égal à $|G|$.

31. Montrer que si θ et θ' sont isomorphes, alors $\langle \chi_\theta, \chi_{\theta'} \rangle = 1$.

32. Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe fini G et soit $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$ une décomposition de E en sous-espaces invariants irréductibles, obtenue avec le théorème de Maschke.

(a) Exprimer χ_θ en fonction des $\chi_{\theta_{|F_i}}$.

(b) Soit $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ une représentation irréductible de G. Montrer que le nombre de F_i tels que θ' et $\theta_{|F_i}$ sont isomorphes est égal à $\langle \chi_{\theta'}, \chi_\theta \rangle$.

33. Soient θ et θ' deux représentations de G. Montrer que θ et θ' sont isomorphes si et seulement si $\chi_\theta = \chi_{\theta'}$.