Notations et rappels

Dans tout le sujet, $\mathbb{R}$ désignera le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. L'ensemble des nombres réels positifs sera noté $\mathbb{R}^+$ et l'ensemble des nombres réels strictement positifs sera noté $\mathbb{R}^{+*}$. L'ensemble des entiers naturels non nuls sera noté $\mathbb{N}^*$. Pour n un entier naturel non nul, $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$.

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Pour f une fonction définie sur I et à valeurs réelles et si $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est de classe C^k sur I si f est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ième est continue sur I. On dira que f est de classe C^∞ sur I si f est indéfiniment dérivable sur I.

Le sujet comporte deux exercices indépendants, suivi d'un problème comportant quatre résultats préliminaires dont les résultats seront réutilisés dans les cinq parties qui suivent.

Exercice 1

On souhaite résoudre l'équation fonctionnelle suivante, où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{2} + \int_0^x (x-t) f(-t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

1. Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles se décompose de manière unique en somme d'une fonction paire $P(f)$ et d'une fonction impaire $I(f)$.
2. Soit f une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer que $P(f)$ et $I(f)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer $P(f)'$ et $I(f)'$ à l'aide de f'.
3. Soit une f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et qui vérifie l'équation (1).
   (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de f'.
   (b) Montrer que f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de f''.
   (c) Justifier que $P(f)$ et $I(f)$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et déterminer des équations différentielles vérifiées par $P(f)$ et $I(f)$.
4. Déterminer les solutions de l'équation fonctionnelle (1).

Exercice 2

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction g_n sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-x) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{array} \right.$$

5. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $g_n(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution positive que l'on notera a_n.
6. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.
7. On considère une suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toute une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
   (b) Quelle est la loi de S_n ? (Justifier brièvement votre réponse).

 Tournez la page S.V.P.

(c) Montrer que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } \lambda = 1, \\ 0 \text{ si } \lambda > 1, \\ 1 \text{ si } \lambda < 1. \end{cases}$$

Indication : pour le premier cas, on pourra utiliser le théorème central-limite. Pour les deux autres cas, on pourra appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev à la variable aléatoire $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

8. (a) Montrer pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{P}(S_n \leqslant n) = g_n(n\lambda)$.

   (b) Justifier que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n(n) = \dfrac{1}{2}$.

   (c) En déduire que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{a_n}{n} = 1$.

Résultat préliminaire 1 : la fonction Γ

Définition 1. *On définit pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) \mathrm{d}t$$

lorsque cette intégrale est convergente.

9. Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
10. Montrer que cette fonction est de classe C^1 sur son ensemble de définition et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale.
11. Soit x un réel strictement positif. Exprimer $\Gamma(x+1)$ à l'aide de $\Gamma(x)$.
12. Établir que pour tout entier naturel n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
13. Montrer que l'on peut prolonger la fonction Γ et définir $\Gamma(z)$ pour tout nombre complexe z dont la partie réelle est strictement positive.

Résultat préliminaire 2 : l'inégalité de Hölder-Minkowski

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On considère deux fonctions continues positives f et g telles que f^p et g^q soient intégrables sur $[0, +\infty[$. Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité de Hölder-Minkowski :

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f^p(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} g^q(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}.$$

14. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$. En déduire que pour tous réels strictement positifs x et y, on a
$$\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geqslant \frac{\ln(x)}{p} + \frac{\ln(y)}{q}.$$
15. Montrer que pour tous réels positifs ou nuls u et v, on a
$$uv \leqslant \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.$$
16. Montrer l'inégalité de Hölder-Minkowski lorsque $\int_0^{+\infty} f^p(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g^q(x)\mathrm{d}x = 1$.
17. Montrer l'inégalité de Hölder-Minkowski dans le cas général.

Résultat préliminaire 3 : sommes harmoniques

On note, pour tout entier naturel n non nul,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Le but de cette partie est de montrer que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$, où γ est une constante réelle appelée constante d'Euler.

18. Montrer que pour tout entier naturel strictement positif n,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$

19. En déduire que la suite $(H_n - \ln n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite finie qu'on notera γ.
20. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$. *Indication* : on pourra travailler par comparaison série-intégrale.
21. On pose $s_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Donner un équivalent de $s_n - s_{n-1}$ quand n tend vers $+\infty$.
22. En déduire un équivalent de s_n lorsque n tend vers $+\infty$ et conclure.

Résultat préliminaire 4 : le problème de Bâle

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Pour cela, on introduit la fonction réelle 2π-périodique f, définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$. Pour n entier naturel, on notera $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier, définis par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t.$$

23. Tracer le graphe de f.
24. Déterminer les coefficients de Fourier de f puis rappeler l'expression de la série de Fourier Sf de f.
25. Rappeler la formule de Parseval.
26. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Tournez la page S.V.P.

Première partie : problème du collectionneur de vignettes

On s'intéresse au problème suivant : un enfant achète des vignettes pour compléter un album contenant n vignettes, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Lorsqu'on achète une vignette, celle-ci est cachée et on ne peut la choisir. On s'intéresse au nombre d'achats nécessaires pour terminer l'album. On suppose que la répartition des n vignettes est uniforme au cours de tous les achats, si bien qu'on assimile l'expérience au tirage avec remise d'un jeton numéroté entre 1 et n dans une urne contenant les n jetons.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois au moins chacun des n jetons. À chaque tirage, on appelle succès le fait d'avoir tiré un numéro non encore obtenu.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $X_{n,i}$ la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois i numéros différents, en comptant à partir du succès précédent. Par convention, $X_{n,1} = 1$ et on a ainsi $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$.

Par exemple, si $n = 4$ et qu'on obtient les tirages $1, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 4$, alors

$X_{4,1}$ prend la valeur 1, *$X_{4,2}$ prend la valeur 1,*
$X_{4,3}$ prend la valeur 2, *$X_{4,4}$ prend la valeur 4,*
T_4 prend la valeur 8.

27. (a) Écrire en Python ou en langage naturel une fonction `collectionneur(n)` qui simule la variable aléatoire T_n. On pourra utiliser la fonction `randint(1,n)` qui simule le tirage aléatoire d'un entier de $[\![1, n]\!]$ de façon uniforme.
    (b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $X_{n,i}$ et donner, sous réserve d'existence, l'espérance $\mathbb{E}(X_{n,i})$ et la variance $\mathbb{V}(X_{n,i})$ de $X_{n,i}$.
    (c) Justifier que les variables aléatoires $(X_{n,i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.
    (d) En déduire une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$ faisant intervenir les sommes

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

    (e) Donner des équivalents simples de $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

Définition 2. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle série génératrice de X la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X = k)t^k$ et, pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$ telle que cette série converge, la fonction génératrice de X est donnée par*

$$Q_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k.$$

28. Soit Y suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer sa fonction génératrice Q_Y. On n'oubliera pas de préciser son ensemble de définition.
29. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
    (a) Justifier que Q_X est bien définie sur $[-1, 1]$ et préciser $Q_X(1)$.
    (b) On suppose que X admet une espérance. Montrer qu'alors Q_X est dérivable sur $[-1, 1]$ puis exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de Q'_X.
    (c) Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si elles admettent la même fonction génératrice.

(d) Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes. Exprimer Q_{X+Y} en fonction de Q_X et Q_Y.

30. (a) On note $Q_n = Q_{T_n}$ la série génératrice de T_n. Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$Q_n(t) = \frac{n!}{n^n} \frac{t^n}{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{kt}{n}\right)}.$$

(b) Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} \frac{t}{1 - \frac{kt}{n}}.$$

Indication : on pourra décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{Q_n(t)}{t}$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathbb{P}(T_n = j) = \frac{1}{n^{j-1}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} k^{j-1} \right).$$

Deuxième partie : log-convexité de la fonction Γ

On rappelle que la fonction Γ est définie dans le premier résultat préliminaire, définition 1.

Définition 3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction. On dit que f est log-convexe sur I si pour $t \in [0, 1]$, pour tous nombres réels x, y dans I,*

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant f(x)^t f(y)^{1-t}.$$

31. Montrer que la fonction Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. *Indication :* on pourra utiliser l'inégalité de Hölder-Minkowski pour p et q bien choisis.

Le but de la question 32 est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4. ***Théorème de Bohr-Mollerup***. *Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction vérifiant :*
- $f(1) = 1$.
- $\forall x > 0,\ f(x+1) = xf(x)$;
- *f est log-convexe.*

Alors $f = \Gamma$.

32. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction vérifiant les trois hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup.
   (a) Soit n un entier naturel. Calculer $f(n+1)$.
   (b) Pour tout réel strictement positif x, exprimer $f(n+x)$ en fonction de $f(x)$.
   (c) Soient $x \in]0, 1]$ et n un entier naturel non nul. Montrer que

$$f(n+x) \leqslant n^x (n-1)!$$

et que

$$n! \leqslant (n+x)^{1-x} f(n+x).$$

Indication : on pourra utiliser les égalités

$$n + x = x(n+1) + (1-x)n, \qquad n + 1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x).$$

(d) On pose pour $x \in]0,1]$ et pour n entier naturel non nul,

$$u_n(x) = \frac{(n+x)^{x-1} n!}{\prod\limits_{0 \leqslant k < n} (x+k)}, \qquad v_n(x) = \frac{n^x (n-1)!}{\prod\limits_{0 \leqslant k < n} (x+k)}.$$

Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $u_n(x) \leqslant f(x) \leqslant v_n(x)$ et $u_n(x) \leqslant \Gamma(x) \leqslant v_n(x)$.

(e) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, les suites $(u_n(x))_{n \geqslant 1}$ et $(v_n(x))_{n \geqslant 1}$ sont équivalentes.

(f) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n(x) = f(x).$$

(g) En déduire que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

(h) Montrer finalement que $f = \Gamma$.

33. Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}.$$

Cette formule est due à Euler. On admettra par la suite qu'elle reste valable lorsque x est un nombre complexe dont la partie réelle est strictement positif.

Troisième partie : fonction caractéristique

Définition 5. *Pour X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction Φ_X définie par*

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(\mathrm{i}tX)),$$

pour tout réel t où cette espérance existe.

34. Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle Y suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On n'oubliera pas de préciser son ensemble de définition.

35. On suppose que X est à une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Montrer que Φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$. Montrer que Φ_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, puis exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de Φ_X et sa dérivée.

(c) Plus généralement, on suppose maintenant que $\mathbb{E}(X^k)$ existe pour tout entier naturel k. Montrer que Φ_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer $\mathbb{E}(X^k)$ en fonction de Φ_X et de ses dérivées.

(d) Lorsque X possède une espérance, donner une relation simple entre la fonction génératrice Q_X de X (voir la définition 2) et Φ_X.

36. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$. Déterminer Φ_{X+Y} en fonction de Φ_X et de Φ_Y.

Quatrième partie : la loi de Gumbel

Définition 6. *On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-x) \cdot \exp(-\exp(-x)) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}. \end{array} \right.$$

37. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition 7. *On dit que X suit une loi de Gumbel si X admet f comme densité.*

Jusqu'à la fin de cette partie, X désigne une variable aléatoire réelle suivant la loi de Gumbel.

38. Déterminer la fonction de répartition de X.

39. Montrer que X admet une espérance et une variance, sans chercher à les calculer.

40. (a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

    (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t$.

    (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - H_{n+1}\right).$$

    (d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

41. Montrer que $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Avec des méthodes semblables à celles de la question 40. (c) on peut montrer (on ne demande pas de le faire !) que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n (\ln(t))^2\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\left((\ln(n))^2 - 2\ln(n)H_{n+1} + 2\sum_{i=1}^{n+1}\frac{H_i}{i}\right).$$

42. (a) Établir que pour tout entier naturel n non nul,

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{H_i}{i} = H_n^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

    (b) En déduire la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

43. *On rappelle que Φ_X est la fonction caractéristique associée à X introduite à la partie précédente, définition 5.* Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(t) = \Gamma(1 - \mathrm{i}t).$$

Tournez la page S.V.P.

Cinquième partie : convergence en loi

On rappelle que pour tout entier naturel n non nul, T_n désigne la variable aléatoire introduite dans la première partie, égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois au moins chacun des n jetons. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$Z_n = \frac{T_n - n\ln(n)}{n}.$$

44. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer Φ_{Z_n} en fonction de Φ_{T_n}.
45. Montrer que pour tout $t \in]-\infty, 1[$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Phi_{Z_n}(t) = \Gamma(1 - \mathrm{i}t).$$

On admet que ce résultat assure la convergence en loi de Z_n vers une loi de Gumbel.

46. Montrer pour tout réel ϵ strictement positif,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(T_n - n\ln(n) \leqslant \epsilon n) = \exp(-\exp(-\epsilon)).$$