

Notations, définitions et énoncés utiles

On désigne par \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, par \mathbb{R} le corps des nombres réels, par \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Dans tout le problème, N et M désignent des entiers naturels non nuls.

On désigne par $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto (x|y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^N et par $x \in \mathbb{R}^N \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ la norme associée. Étant donné un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^N , on note alors $F^\perp = \{x \in \mathbb{R}^N, (x|y) = 0 \text{ pour tout } y \in F\}$.

On note $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $N \times N$ à coefficients réels et $\mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à M lignes et N colonnes, à coefficients réels. On identifiera les vecteurs de \mathbb{R}^N avec des matrices de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

Pour A une matrice à M lignes et N colonnes, on note A^\top sa matrice transposée, à N lignes et M colonnes.

On dit qu'une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est non négative si pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a $(Ax|x) \geq 0$. On dit que A est positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, on a $(Ax|x) > 0$.

Le problème est organisé en 5 parties. Les résultats des questions préliminaires peuvent donner des idées ou des arguments utiles dans les parties ultérieures. Chacune des parties fait appel à des techniques différentes et commence de manière à se familiariser progressivement avec les notions mises en jeu. Les parties 2 et 3 puis 4 et 5 sont liées. Le cas échéant, il peut être fait référence à un résultat établi dans une des parties précédentes.

Questions préliminaires

1. Soient a, b deux réels avec $a > 0$. Donner l'allure du graphe de $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{a}{2}x^2 - bx$.
2. Soient a, b deux réels avec $a < b$ et $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $u(x_0) = \min_{a \leq x \leq b} u(x)$. Montrer que $u'(x_0) = 0$ et $u''(x_0) \geq 0$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^N et soit P la matrice de la projection orthogonale de \mathbb{R}^N sur F relativement à la base canonique de \mathbb{R}^N . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a $\|Px\| \leq \|x\|$.
4. Soit une matrice $C \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Im}(C^\top) = (\text{Ker}(C))^\perp$.

Première partie : sur les séries de Fourier

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique et continue sur $[-\pi, \pi]$. On lui associe la série de Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} \text{ où, pour tout } n \in \mathbb{Z}, \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad (1)$$

5. Rappeler, sans plus de justification mais précisément, en quel(s) sens la série de Fourier converge vers f lorsque f est continue et lorsque f est de classe C^1 .
6. On considère la fonction définie par $g(x) = x(\pi - x)$ pour $x \in [0, \pi]$ et prolongée par parité sur $[-\pi, 0]$ et par 2π -périodicité sur \mathbb{R} . En donner une représentation graphique sur $[-2\pi, 2\pi]$ et exprimer sa série de Fourier.

7. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx$ pour la fonction g introduite à la question précédente.
8. En déduire les sommes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Dans toute la suite de cette partie, on fixe $r \in \mathbb{N}$ avec $r \geq 2$ et on suppose que f est 2π -périodique et de classe C^r sur \mathbb{R} .

9. Montrer que l'on peut trouver une constante $M_r > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{M_r}{|n|^r}.$$

10. A-t-on alors convergence normale sur $[-\pi, \pi]$ de la série de Fourier vers f ? Peut-on dire que la série de Fourier converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$? (Ce qui permettrait d'écrire $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$.)
11. Soit un entier naturel $L \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose

$$I_L[f] = \frac{1}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} f\left(\frac{2\pi\ell}{L}\right).$$

Montrer que

$$I_L[f] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(nL).$$

12. En déduire que l'on peut trouver une constante $M'_r > 0$ telle que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - I_L[f] \right| \leq \frac{M'_r}{L^r}.$$

13. Illustrer par un dessin et commenter le résultat obtenu.

Deuxième partie : étude d'une fonctionnelle quadratique

Soient $b \in \mathbb{R}^N$ et A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ qu'on suppose non négative¹. On pose

$$\mathcal{J} : x \in \mathbb{R}^N \longmapsto \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x).$$

14. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^N$ satisfait $Ax = b$ alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, on a $\mathcal{J}(x+h) \geq \mathcal{J}(x)$.
15. Réciproquement, montrer que si \mathcal{J} atteint un minimum en $x \in \mathbb{R}^N$, alors $Ax = b$. (On pourra poser $h = tk$, avec $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^N$, dans l'expression de $\mathcal{J}(x+h)$.)

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que A est positive. (La définition est rappelée en préambule du sujet.)

1. La définition est rappelée en préambule du sujet.

16. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a $(Ax|x) \geq \alpha \|x\|^2$.
17. En déduire que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(x) = +\infty$.
18. Montrer que A est inversible et que l'on peut trouver $\beta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a $(A^{-1}y|y) \geq \beta \|y\|^2$.
19. En conclure qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^N$, que l'on caractérisera, en lequel \mathcal{J} admet un minimum sur \mathbb{R}^N .

Troisième partie : un problème connexe

Soient A une matrice symétrique et positive² de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^N$, C une matrice de $\mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ et une matrice colonne $c \in \mathbb{R}^M$. On note

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N, Cx = c\}.$$

On suppose de plus dans toute cette partie que A admet au moins deux valeurs propres distinctes.

20. Montrer que $\inf_{x \neq 0} \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2} < \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
21. En étudiant comme précédemment $\mathcal{J}(x+h)$ avec $x \in C$ et $h \in \text{Ker}(C)$, montrer que \mathcal{J} atteint un minimum sur C en x si et seulement si pour tout $h \in \text{Ker}(C)$, on a $(Ax-b|h) = 0$.
22. En déduire que \mathcal{J} atteint un minimum sur C en x si et seulement si il existe $p \in \mathbb{R}^M$ tel que

$$\begin{cases} Ax + C^\top p = b, \\ Cx = c. \end{cases} \quad (2)$$

23. Montrer que ce système (2) admet une unique solution $(x,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ si et seulement si $\text{rang}(C^\top) = M$.
24. Donner un procédé permettant de construire, à partir de la matrice C , la matrice de la projection orthogonale P de \mathbb{R}^N (dans la base canonique) sur $\text{Ker}(C)$.
25. On suppose $c = 0$. Soient $(x,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ solution de (2) et P la matrice de la projection orthogonale de \mathbb{R}^N sur $\text{Ker}(C)$ (dans la base canonique). Avec $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ et $\rho > 0$ donnés, on construit la suite définie par

$$x^{(n+1)} = P(x^{(n)} - \rho(Ax^{(n)} - b)), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'il existe $\rho_0 > 0$ et $0 < \kappa_0 < 1$ (qu'on explicitera) tels que si $0 < \rho < \rho_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|x^{(n+1)} - x\|^2 \leq \kappa_0 \|x^{(n)} - x\|^2.$$

26. Que peut-on en déduire ?

Quatrième partie : sur un problème aux limites

On va étudier le problème aux limites

$$-(a(x)u'(x))' = f(x) \text{ pour } 0 < x < \pi \text{ et } u(0) = u(\pi) = 0 \quad (3)$$

où $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, $a : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle qu'il existe $a_* > 0$ vérifiant $a(x) \geq a_* > 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. À cette fin, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{H}_0 = \{v : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ de classe } C^1 \text{ et telle que } v(0) = v(\pi) = 0\}$$

qu'on munit de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{H}_0}^2 = \int_0^\pi (|v(t)|^2 + |v'(t)|^2) dt$$

qui fait de \mathcal{H}_0 un espace préhilbertien réel. On notera $(u|v)_{\mathcal{H}_0}$ le produit scalaire associé.

2. La définition est rappelée en préambule du sujet

27. Montrer que la famille de fonctions $x \mapsto \sin(x), \dots, x \mapsto \sin(Nx)$ est orthogonale dans \mathcal{H}_0 (pour ce produit scalaire), puis justifier que c'est une famille libre. On notera \mathcal{F}_N le sous-espace engendré par cette famille.

28. On introduit la matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$A_{k,\ell} = k\ell \int_0^\pi a(x) \cos(kx) \cos(\ell x) dx. \quad (4)$$

Montrer que A est symétrique et positive³.

29. Montrer qu'on peut trouver une constante réelle $\gamma > 0$ telle que pour tout élément v de \mathcal{H}_0 et tout $x \in [0, \pi]$, on a

$$|v(x)| \leq \gamma \sqrt{\int_0^\pi |v'(x)|^2 dx}.$$

30. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème de Cauchy

$$-(au')' = f, \quad u(0) = 0, \quad u'(\pi) = \mu$$

admet une unique solution, qu'on notera u_μ , définie sur $[0, \pi]$.

31. Établir que $\mu \mapsto u_\mu(\pi)$ est une fonction affine et en déduire que l'on peut trouver une unique valeur $\mu_* \in \mathbb{R}$ telle que $u_{\mu_*}(\pi) = 0$ (ce qui définit donc une solution de (3)).

32. Soit $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 qui est solution de (3). Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_0$, on a

$$\int_0^\pi a(x) u'(x) \varphi'(x) dx = \int_0^\pi f(x) \varphi(x) dx.$$

33. Montrer que

$$(v_1, v_2) \mapsto \mathcal{A}(v_1, v_2) = \int_0^\pi a(x) v_1'(x) v_2'(x) dx$$

définit un produit scalaire sur \mathcal{H}_0 .

34. En déduire que (3) admet une unique solution dans \mathcal{H}_0 .

35. Soient un réel $K > 0$ et $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0, \pi]$ telle que, pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi]$, $|f_m(x)| \leq K$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = f(x)$.

Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |f_m(x) - f(x)| dx = 0$.

36. On désigne alors par u_m et u les solutions de (3) associées à f_m et f respectivement. Montrer que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |u_m'(t) - u'(t)|^2 dt = 0$$

et que u_m converge vers u uniformément sur $[0, \pi]$.

37. On suppose que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Montrer que la solution u de (3) associée vérifie $u(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$. On suppose ensuite que $f(x) \geq 0$. Montrer qu'alors u est à valeurs non négatives.

38. On définit $x \mapsto \tilde{u}_N(x) = \sum_{k=1}^N y_k \sin(kx)$ comme le projeté orthogonal sur \mathcal{F}_N de u , solution de (3), pour le produit scalaire défini par \mathcal{A} . Montrer que le vecteur $y = (y_1, \dots, y_N)$ vérifie $Ay = b$ où A est la matrice définie par les relations (4), pour un vecteur $b \in \mathbb{R}^N$ qu'on précisera.

3. La définition est rappelée en préambule du sujet.

39. Soient $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^N$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Exprimer le problème de minimisation de l'application $y \mapsto \frac{1}{2}(Ay|y) - (b|y)$ sur $\{y \in \mathbb{R}^N, (w_1|y) = c_1, (w_2|y) = c_2\}$ sous forme matricielle, et justifier qu'il admet une unique solution, moyennant une hypothèse adéquate sur les vecteurs w_1 et w_2 .

Cinquième partie : un cadre fonctionnel plus élaboré

On introduit maintenant l'ensemble H des fonctions continues sur \mathbb{R} , éventuellement à valeurs dans \mathbb{C} , et 2π -périodiques telles que

$$\mathcal{N}(f) = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^2) |\hat{f}(n)|^2} < +\infty$$

où $\hat{f}(n)$ est défini par la relation (1) dans la première partie.

40. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et 2π -périodique, alors $f \in H$.
41. On admet que pour toute fonction f continue et 2π -périodique et pour $\epsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique $x \mapsto \phi_\epsilon(x) = \sum_{|k| \leq K_\epsilon} \alpha_k e^{ikx}$, où les coefficients α_k sont des complexes, tel que $\|f - \phi_\epsilon\|_{L^\infty([-\pi, \pi])} = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - \phi_\epsilon(x)| \leq \epsilon$.
Justifier que la série de Fourier de f converge vers f dans $L^2([-\pi, \pi])$.
42. Soit $f \in \mathcal{H}_0$. On prolonge cette fonction en une fonction impaire sur $[-\pi, 0]$, puis par 2π -périodicité en une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} . On peut alors considérer les coefficients de Fourier de ce prolongement⁴, qu'on persiste à noter f . Montrer que $\|f\|_{\mathcal{H}_0} = \sqrt{\pi} \mathcal{N}(f)$.
43. Montrer que (H, \mathcal{N}) est un espace vectoriel normé.
44. Montrer que (H, \mathcal{N}) est un espace de Hilbert.
45. Soit $f \in H$. Montrer que l'on peut trouver une constante réelle $K > 0$ telle que pour tout $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^1 sur \mathbb{R} et 2π -périodique, on a

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \psi'(t) dt \right| \leq K \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(t)|^2 dt}.$$

Cette dernière relation permet d'identifier f' comme une fonction de carré intégrable, qui coïncide avec sa série de Fourier.

46. Montrer que la suite $(\tilde{u}_N)_{N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ construite dans la partie précédente converge uniformément vers u , solution de (3).
47. Quel est l'intérêt des résultats de la première partie dans ce contexte?

————— FIN DU SUJET —————

4. On ne demande pas de vérifier la régularité C^1