# Notations et rappels

*Dans tout le sujet, $\mathbb{R}$ désignera le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. L'ensemble des nombres réels positifs sera noté $\mathbb{R}^+$ et l'ensemble des nombres réels strictement positifs sera noté $\mathbb{R}^{+*}$. L'ensemble des entiers naturels non nuls sera noté $\mathbb{N}^*$. Pour $n$ un entier naturel non nul, $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels $i$ tels que $1 \leqslant i \leqslant n$.*

*Soit $I$ un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Pour $f$ une fonction définie sur $I$ et à valeurs réelles et si $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que $f$ est de classe $C^k$ sur $I$ si $f$ est $k$ fois dérivable sur $I$ et si sa dérivée $k$-ième est continue sur $I$. On dira que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $I$ si $f$ est indéfiniment dérivable sur $I$.*

*Le sujet comporte deux exercices indépendants, suivi d'un problème comportant quatre résultats préliminaires dont les résultats seront réutilisés dans les cinq parties qui suivent.*

## Exercice 1

*On souhaite résoudre l'équation fonctionnelle suivante, où $f$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{2} + \int_0^x (x-t) f(-t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

1. Montrer que toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles se décompose de manière unique en somme d'une fonction paire $P(f)$ et d'une fonction impaire $I(f)$.

   Raisonner par analyse synthèse.
   On obtient $P(f)(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)),\ \ I(f)(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$

2. Soit $f$ une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer que $P(f)$ et $I(f)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer $P(f)'$ et $I(f)'$ à l'aide de $f'$.

   $P(f)$ et $I(f)$ sont dérivables par opérations usuelles.
   $P(f)(x)' = \dfrac{1}{2}(f'(x) - f'(-x)),\ \ I(f)'(x) = \dfrac{1}{2}(f'(x) + f'(-x))$

3. Soit une $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et qui vérifie l'équation (1).
   (a) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $f'$.

   On a : $f(x) = \dfrac{x}{2} + x\displaystyle\int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t f(-t)\,\mathrm{d}t$.
   Donc $f$ est $C^1$ et

   $$f'(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t + x f(-x) - x f(-x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t$$

   (b) Montrer que $f'$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $f''$.

   $f'$ est de classe $C^1$ et $f''(x) = f(-x)$

   (c) Justifier que $P(f)$ et $I(f)$ sont de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer des équations différentielles vérifiées par $P(f)$ et $I(f)$.

   $P(f)$ et $I(f)$ sont de classe $C^2$ car $f$ l'est et on a, en identifiant partie paire et partie impaire (par unicité de la décomposition) :

   $$P(f)'' = P(f) \text{ et } \ I(f)'' = -I(f)$$

4. Déterminer les solutions de l'équation fonctionnelle (1).

En résolvant les équations différentielles, on obtient :
•$P(f) = A\cosh + B\sinh$ puis $P(f) = A\cosh$ car $P(f)$ est paire.
•$I(f) = C\cos + D\sin$ puis $I(f) = D\sin$ car $I(f)$ est impaire.
•d'où $f = A\cosh + D\sin$
•Comme $f(0) = 0$, et $f'(0) = \frac{1}{2}$, on a $A = 0$ et $D = \frac{1}{2}$, d'où $f(x) = \frac{1}{2}\sin$.
•Après vérifcation, $\frac{1}{2}\sin$ est bien solution.

## Exercice 2

*Pour tout entier $n$ strictement positif, on définit la fonction $g_n$ sur $\mathbb{R}^+$ par*

$$g_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-x) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{array} \right.$$

5. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $g_n(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution positive que l'on notera $a_n$.

$g_n$ est dérivable par opérations usuelles et $g_n'(x) = -\exp(-x)\frac{x^n}{n!} < 0$.
Ainsi $g_n$ est continue, strictement décroissante, $g_n(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ donc $g_n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, 1]$.
Ainsi $g_n(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution.

6. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

$g_{n+1}(x) = g_n(x) + \exp(-x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > g_n(x)$ donc $g_n(a_n) = \frac{1}{2} = g_{n+1}(a_{n+1}) > g_n(a_{n+1})$ comme $g_n$ est décroissante, on a $a_n < a_{n+1}$.

7. On considère une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toute une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Déterminer l'espérance et la variance de $S_n$.

   On a $\mathbb{E}(X_i) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X_i) = \lambda$.
   Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(S_n) = n\lambda$ et par indépendance, on a $\mathbb{V}(S_n) = n\lambda$

   (b) Quelle est la loi de $S_n$ ? (Justifier brièvement votre réponse).

   •La somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de poisson est encore une loi de poisson.
   •Par récurrence immédiate, $S_n$ suit donc une loi de Poisson.
   •Son paramètre est donc $n\lambda = \mathbb{E}(S_n)$.

   (c) Montrer que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } \lambda = 1, \\ 0 \text{ si } \lambda > 1, \\ 1 \text{ si } \lambda < 1. \end{cases}$$

*Indication* : pour le premier cas, on pourra utiliser le théorème central-limite. Pour les deux autres cas, on pourra appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev à la variable aléatoire $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

•Pour $\lambda = 1$ :
$S_n$ est la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes admettant la même loi, ainsi $M_n^* = S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.
$\mathbb{P}(S_n \leqslant n) = \mathbb{P}(S_n^* \leqslant 0) \to \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.
•Pour $\lambda > 1$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \leqslant n) &= \mathbb{P}(S_n - n\lambda \leqslant n(1-\lambda)) \\ &\leqslant \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| > n(\lambda - 1)) \\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2(\lambda-1)^2} = \frac{\lambda}{n(\lambda-1)^2} \to 0\end{aligned}$$

•Pour $\lambda < 1$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > n) &= \mathbb{P}(S_n - n\lambda > n(1-\lambda)) \\ &\leqslant \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| > n(1-\lambda)) \\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2(\lambda-1)^2} = \frac{\lambda}{n(\lambda-1)^2} \to 0\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(S_n \leqslant n) \to 1$.

8. (a) Montrer pour tout entier naturel $n$ non nul, $\mathbb{P}(S_n \leqslant n) = g_n(n\lambda)$.

$\mathbb{P}(S_n \leqslant n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k) = \exp(-n\lambda) \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\lambda)^k}{k!} = g_n(n\lambda)$.

(b) Justifer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} g_n(n) = \dfrac{1}{2}$.

Avec $\lambda = 1$, on a $g_n(n) = \mathbb{P}(S_n \leqslant n) \to \dfrac{1}{2}$

(c) En déduire que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{a_n}{n} = 1$.

Soit $\epsilon > 0$, Posons $\lambda = 1 + \epsilon > 1$, on a $g_n(n\lambda) \to 0$
Donc pour $n$ assez grand $g_n(n\lambda) < \dfrac{1}{2} = g_n(a_n)$ donc $n(1+\epsilon) = n\lambda > a_n$.
De même $n(1-\epsilon) < a_n$ pour $n$ assez grand.
Donc $\dfrac{a_n}{n} \to 1$.

## Résultat préliminaire 1 : la fonction $\Gamma$

**Définition 1.** *On définit pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) \mathrm{d}t$$

*lorsque cette intégrale est convergente.*

9. Déterminer l'ensemble de définition de $\Gamma$.

•L'intégrale est généralisée en $+\infty$ et en 0. L'intégrande est positive.
•En $+\infty$, $t^{x-1}\exp(-t) = o(\exp(-t/2))$ donc l'intégrale est convergente.
•En 0, $t^{x-1}\exp(-t) \sim t^{x-1}$ donc l'intégrale est convergente si et seulemnt si $1-x<1$, soit $x>0$.
•Finalement $\Gamma$ est définie pour sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Montrer que cette fonction est de classe $C^1$ sur son ensemble de définition et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale.

On applique le théorème de domination et on obtient :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$$

11. Soit $x$ un réel strictement positif. Exprimer $\Gamma(x+1)$ à l'aide de $\Gamma(x)$.

Par IPP, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

12. Établir que pour tout entier naturel $n$ non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

$\Gamma(1) = 1$, puis par récurrence $\Gamma(n) = (n-1)!$

13. Montrer que l'on peut prolonger la fonction $\Gamma$ et définir $\Gamma(z)$ pour tout nombre complexe $z$ dont la partie réelle est strictement positive.

Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$ $t^z = t^x t^{iy}$ donc $|t^z| = t^x$. Ainsi, $\Gamma(z)$ est définie pour $x>0$.

## Résultat préliminaire 2 : l'inégalité de Hölder-Minkowski

*Soient p et q deux réels strictement positifs tels que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. *On considère deux fonctions continues positives* $f$ *et* $g$ *telles que* $f^p$ *et* $g^q$ *soient intégrables sur* $[0,+\infty[$. *Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité de Hölder-Minkowski :*

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

14. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$. En déduire que pour tous réels strictement positifs $x$ et $y$, on a

$$\ln\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \geqslant \frac{\ln(x)}{p} + \frac{\ln(x)}{q}.$$

ln est deux fois dérivable et $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc ln est concave.
En posant $\lambda = \frac{1}{p}$, on a $1-\lambda = \frac{1}{q}$ et $\lambda \in ]0,1[$ d'où par concavité :

$$\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda\ln(x) + (1-\lambda)y$$

, d'où le résultat.

15. Montrer que pour tous réels positifs ou nuls $u$ et $v$, on a

$$uv \leqslant \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.$$

Posons $x = u^p$ et $y = v^q$, par croissance de exp on obtient le résultat.

16. Montrer l'inégalité de Hölder-Minkowski lorsque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^p(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g^q(x)\mathrm{d}x = 1$.

D'après ce qui précède : on a : $f(x)g(x) \leqslant \dfrac{1}{p}f^p(x) + \dfrac{1}{q}g^q(x)$, par croissance de l'intégrale, puisque les 2 fonctions $f^p$ et $g^q$ sont intégrables, on a :

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f^p(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_0^{+\infty} g^q(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Donc l'inégalité est vérifiée dans ce cas.

17. Montrer l'inégalité de Hölder-Minkowski dans le cas général.

Evidemment, l'inégalité est vraie si $f$ ou $g$ sont nulles.

Posons $A = \int_0^{+\infty} f^p(t)\mathrm{d}t$ et $f_1 = \dfrac{f}{A^{\frac{1}{p}}}$ On a alors $\int_0^{+\infty} f_1^p(t)\mathrm{d}t = 1$.
De même, posons $B = \int_0^{+\infty} g^q(t)\mathrm{d}t$ et $g_1 = \dfrac{g}{B^{\frac{1}{q}}}$ On a alors $\int_0^{+\infty} g_1^q(t)\mathrm{d}t = 1$.
On en déduit $\int_0^{+\infty} f_1(t)g_1(t)\mathrm{d}t \leqslant 1$. D'où : $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}$. D'où le résultat.

## Résultat préliminaire 3 : sommes harmoniques

*On note, pour tout entier naturel $n$ non nul,*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

*Le but de cette partie est de montrer que*

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

*lorsque $n$ tend vers $+\infty$, où $\gamma$ est une constante réelle appelée constante d'Euler.*

18. Montrer que pour tout entier naturel strictement positif $n$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

19. En déduire que la suite $(H_n - \ln n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite finie qu'on notera $\gamma$.

En sommant : on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ soit $H_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant H_n - \dfrac{1}{n}$.
Donc $\dfrac{1}{n} \leqslant H_n - \ln n \leqslant 1$. La suite est bornée.
De plus $H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln n) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant 0$ d'après ce qui précède, donc la suite est décroissante.
Elle est donc convergente.

20. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. *Indication* : on pourra travailler par comparaison série-intégrale.

Posons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
Comme précédemment on a :

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

D'où : $R_{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant R_n$, en en déduit : $\dfrac{1}{n} \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ on en déduit $R_n \sim \dfrac{1}{n}$.

21. On pose $s_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Donner un équivalent de $s_n - s_{n-1}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

22. En déduire un équivalent de $s_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et conclure.

La série de terme général $s_n - s_{n-1}$ est donc convergente et

$$s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (s_{k-1} - s_k) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2n}$$

D'où le résultat en utilisant la Q20

## Résultat préliminaire 4 : le problème de Bâle

*Le but de cet exercice est de calculer la valeur de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *Pour cela, on introduit la fonction réelle* $2\pi$*-périodique* $f$*, définie par* $f(x) = x$ *pour tout* $x \in [-\pi, \pi[$. *Pour* $n$ *entier naturel, on notera* $a_n(f)$ *et* $b_n(f)$ *les coefficients de Fourier, définis par*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t,$$

23. Tracer le graphe de $f$.

24. Déterminer les coefficients de Fourier de $f$ puis rappeler l'expression de la série de Fourier $Sf$ de $f$.

$f$ est impaire donc $a_n(f) = 0$.
Par IPP, on a $b_n(f) = \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}$
$S(f)(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx)$

25. Rappeler la formule de Parseval.

$f$ étant $2\pi$ périodique, continue par morceaux, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

26. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On applique la formule de Parseval, on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \mathrm{d}t = \frac{2\pi^3}{3}$ d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

## Première partie : problème du collectionneur de vignettes

*On s'intéresse au problème suivant : un enfant achète des vignettes pour compléter un album contenant $n$ vignettes, où $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Lorsqu'on achète une vignette, celle-ci est cachée et on ne peut la choisir. On s'intéresse au nombre d'achats nécessaires pour terminer l'album. On suppose que la répartition des $n$ vignettes est uniforme au cours de tous les achats, si bien qu'on assimile l'expérience au tirage avec remise d'un jeton numéroté entre 1 et $n$ dans une urne contenant les $n$ jetons.*

*On note $T_n$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois au moins chacun des $n$ jetons. À chaque tirage, on appelle succès le fait d'avoir tiré un numéro non encore obtenu.*

*Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $X_{n,i}$ la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois $i$ numéros différents, en comptant à partir du succès précédent. Par convention, $X_{n,1} = 1$ et on a ainsi $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$.*

*Par exemple, si $n = 4$ et qu'on obtient les tirages $1, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 4$, alors*

| | |
|---|---|
| $X_{4,1}$ *prend la valeur* 1, | $X_{4,2}$ *prend la valeur* 1, |
| $X_{4,3}$ *prend la valeur* 2, | $X_{4,4}$ *prend la valeur* 4, |
| $T_4$ *prend la valeur* 8. | |

27. (a) Écrire en Python ou en langage naturel une fonction `collectionneur(n)` qui simule la variable aléatoire $T_n$. On pourra utiliser la fonction `randint(1,n)` qui simule le tirage aléatoire d'un entier de $[\![1, n]\!]$ de façon uniforme.

```
from random import randint
def collectionneur(n):
        t=0
        T=[]
        while True :
                x=randint(1,n)
                t +=1
                if x not in T :
                        T.append(x)
                if len(T)==n :
                        return t
```

(b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $X_{n,i}$ et donner, sous réserve d'existence, l'espérance $\mathbb{E}(X_{n,i})$ et la variance $\mathbb{V}(X_{n,i})$ de $X_{n,i}$.

Pour $i = 1$, $X_{n,1}$ est certaine et $\mathbb{E}(X_{n,1}) = 1)$ et $\mathbb{V}(X_{n,1}) = 0$.
Pour $i \in [\![2, n]\!]$, $i - 1$ jetons ont déjà été trouvés, on cherche un nouveau jeton, il y en a $n - i + 1$, ainsi $X_{n,i}$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-i+1}{n}$.
On a donc $\mathbb{E}(X_{n,i}) = \dfrac{n}{n-i+1}$ et $\mathbb{V}(X_{n,i}) = \dfrac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}$

(c) Justifier que les variables aléatoires $(X_{n,i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.

Ecrire l'événement $(X_{n,1} = i_1, \ldots X_{n,n} = i_n)$ en fonction des événements $A_j$=« Tirer un nouveau numéro au rang $j$» et obtenir le résultat.

(d) En déduire une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$ faisant intervenir les sommes

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Comme $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$, on a :

•Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = nH_n$.

•Par indépendance :

$$\mathbb{V}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_{n,i}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{j^2} = n^2 S_n - nH_n$$

(e) Donner des équivalents simples de $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

•$\mathbb{E}(T_n) \sim n \ln n$

•$\mathbb{V}(T_n) \sim n^2 S_n \sim \dfrac{\pi^2 n^2}{6}$

**Définition 2.** *Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle série génératrice de $X$ la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X = k)t^k$ et, pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$ telle que cette série converge, la fonction génératrice de $X$ est donnée par*

$$Q_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k.$$

28. Soit $Y$ suivant une loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$. Déterminer sa fonction génératrice $Q_Y$. On n'oubliera pas de préciser son ensemble de définition.

Pour une loi géométrique, on a $\forall k \geqslant 1, \mathbb{P}(Y = k) = pq^{k-1}$.
Donc $Q_Y(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}t^k = \frac{pt}{1-qt}$ définie pour $t \in ]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$

29. On considère une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Justifier que $Q_X$ est bien définie sur $[-1, 1]$ et préciser $Q_X(1)$.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $Q_X(t)$ est absolument convergente pour $t \in [-1, 1]$ et $Q_X(1) = 1$

(b) On suppose que $X$ admet une espérance. Montrer qu'alors $Q_X$ est dérivable sur $[-1, 1]$ puis exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $Q'_X$.

Si $X$ admet une espérance alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ est convergente donc par théorème de dérivation des séries, $Q_X$ est dérivable sur $[-1,1]$ et

$$Q'_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)t^{k-1}$$

Ainsi $\mathbb{E}(X) = Q'_X(1)$.

(c) Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $X$ et $Y$ ont même loi si et seulement si elles admettent la même fonction génératrice.

•Si $X$ et $Y$ suivent la même loi, alors $Q_X = Q_Y$.
•$Q_X$ est une série entière définie au moins sur $]-1,1[$.
Donc $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{Q_X^{(k)}(0)}{k!}$ donc si $Q_X = Q_Y$ alors $X$ et $Y$ suivent la même loi.

(d) Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires indépendantes. Exprimer $Q_{X+Y}$ en fonction de $Q_X$ et $Q_Y$.

Par théorème de transfert, on remarque $Q_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.
Ainsi, $Q_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = Q_X(t)Q_Y(t)$ par indépendance.

30. (a) On note $Q_n = Q_{T_n}$ la série génératrice de $T_n$. Montrer que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$Q_n(t) = \frac{n!}{n^n} \frac{t^n}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{kt}{n}\right)}.$$

$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$ donc

$$Q_n(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_{X_{n,i}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\frac{n-i+1}{n}t}{1 - \frac{i-1}{n}t} = \frac{n!}{n^n} \frac{t^n}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{kt}{n}\right)}$$

(b) Montrer que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} \frac{t}{1 - \frac{kt}{n}}.$$

*Indication* : on pourra décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{Q_n(t)}{t}$.

$\dfrac{Q_n(t)}{t}$ se décompose en éléments simples sous la forme $a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{a_k}{1-\frac{kt}{n}}$.

On obtient $a_0$ en étudiant la limite de $\dfrac{Q_n(t)}{t}$ en $+\infty$ :

$a_0 = \dfrac{n!}{n^n}(-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!} = (-1)^{n-1}$

On obtient $a_k$ en évaluant $(1-\dfrac{kt}{n})\dfrac{Q_n(t)}{t}$ en $t = \frac{n}{k}$ :

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{n!}{n^n}(\frac{n}{k})^{n-1} \prod_{1\leqslant i\leqslant n-1, i\neq k} \frac{1}{1-\frac{i}{k}} \\
&= \frac{n!}{n^n}(\frac{n}{k})^{n-1} \prod_{1\leqslant i\leqslant n-1, i\neq k} \frac{k}{k-i} \\
&= \frac{n!}{n^n}(\frac{n}{k})^{n-1} \frac{k^{n-2}(-1)^{n-1-k}}{(n-1-k)!(k-1)!} \\
&= (-1)^{n-1-k}\binom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) En déduire que pour tout entier naturel $j$ non nul,

$$\mathbb{P}(T_n = j) = \frac{1}{n^{j-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^{n-1-k}k^{j-1}\right).$$

On dérive $Q_n$ $j$ fois, en remarquant : $\dfrac{t}{1-\frac{kt}{n}} = \dfrac{n}{k}(-1+\dfrac{n}{k}\dfrac{1}{\frac{n}{k}-t})$ :

$$Q_n^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^{n-1-k}\frac{n}{k}.\frac{n}{k}.\frac{j!}{(\frac{n}{k}-t)^{j+1}}$$

D'où le résultat en évaluant en 0

## Deuxième partie : log-convexité de la fonction $\Gamma$

*On rappelle que la fonction $\Gamma$ est définie dans le premier résultat préliminaire, définition 1.*

**Définition 3.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction. On dit que $f$ est log-convexe sur $I$ si pour $t \in [0,1]$, pour tous nombres réels $x, y$ dans $I$,*

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant f(x)^t f(y)^{1-t}.$$

31. Montrer que la fonction $\Gamma$ est log-convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.

    *Indication :* on pourra utiliser l'inégalité de Hölder-Minkowski pour $p$ et $q$ bien choisis.

Pour $t \neq 0$ et $t \neq 1$, on choisit : $p = \dfrac{1}{t}$ et $q$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ soit $\dfrac{1}{q} = 1 - t$.
On a :

$$\begin{aligned}\Gamma(tx + (1-t)y) &= \int_0^{+\infty} u^{tx+(1-t)y-1} \exp(-u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} u^{tx-t} \exp(-tu).u^{(1-t)(y-1)} \exp(-(1-t)u)\mathrm{d}u \\ &\leqslant \left(\int_0^{+\infty} u^{x-1} \exp(-u)\mathrm{d}u\right)^t \left(\int_0^{+\infty} u^{y-1} \exp(-u)\mathrm{d}u\right)^{1-t} = \Gamma(x)^t\Gamma(y)^{1-t}\end{aligned}$$

*Le but de la question 32 est de démontrer le théorème suivant :*

**Théorème 4.** ***Théorème de Bohr-Mollerup***. *Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction vérifiant :*
- $f(1) = 1$.
- $\forall x > 0,\ f(x+1) = xf(x)$ ;
- *$f$ est log-convexe.*

*Alors $f = \Gamma$.*

32. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction vérifiant les trois hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup.

(a) Soit $n$ un entier naturel. Calculer $f(n+1)$.

Par récurrence $f(n+1) = n!$

(b) Pour tout réel strictement positif $x$, exprimer $f(n+x)$ en fonction de $f(x)$.

Par récurrence $f(n+x) = (n+x-1)f(n+x-1) = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)\right) f(x)$

(c) Soient $x \in ]0,1]$ et $n$ un entier naturel non nul. Montrer que

$$f(n+x) \leqslant n^x(n-1)!$$

et que

$$n! \leqslant (n+x)^{1-x} f(n+x).$$

*Indication* : on pourra utiliser les égalités

$$n + x = x(n+1) + (1-x)n, \qquad n+1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x).$$

•Comme $n + x = x(n+1) + (1-x)n$, et $x \in ]0,1[$, on en déduit :

$$f(n+x) \leqslant f(n+1)^x f(n)^{1-x} = (n!)^x (n-1)!^{1-x} = n^x(n-1)!$$

•Comme $n+1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$, on a de même :

$$n! = f(n+1) \leqslant f(n+x)^x f(n+1+x)^{1-x} = f(n+x)^x (n+x)^{1-x} f(n+x)^{1-x} = (n+x)^{1-x} f(n+x)$$

(d) On pose pour $x \in ]0,1]$ et pour $n$ entier naturel non nul,

$$u_n(x) = \frac{(n+x)^{x-1} n!}{\prod\limits_{0 \leqslant k < n} (x+k)}, \qquad v_n(x) = \frac{n^x(n-1)!}{\prod\limits_{0 \leqslant k < n} (x+k)}.$$

Montrer que pour tout $x \in ]0,1]$, $u_n(x) \leqslant f(x) \leqslant v_n(x)$ et $u_n(x) \leqslant \Gamma(x) \leqslant v_n(x)$.

Comme $f(n+x) = \left(\prod_{0\leqslant k<n} (x+k)\right) f(x)$, on obtient : $f(x) \leqslant \dfrac{n^x(n-1)!}{\prod_{0\leqslant k<n} (x+k)} = v_n(x)$.

De même pour l'autre inégalité.
Ceci est vrai aussi pour $\Gamma$ puisque $\Gamma$ vérifie les mêmes hypothèses.

(e) Montrer que pour tout $x \in ]0,1[$, les suites $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ sont équivalentes.

$\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{(n+x)^{x-1}n!}{n^x(n-1)!} = \left(\dfrac{n+x}{n}\right)^{x-1} \to 1$

(f) En déduire que pour tout $x \in ]0,1[$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n(x) = f(x).$$

Pour $x \in ]0,1[$, Par pincement d'équivalent puisque $f(x) > 0$, $f(x) \sim u_n(x)$ donc $(u_n((x)))$ et $(v_n(x))$ convergent vers $f(x)$

(g) En déduire que pour tout $x \in ]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

On a de même $\Gamma(x)$ est la limite commune de $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ donc par unicité de la limite, on obtient $f(x) = \Gamma(x)$.
C'est vrai aussi pour $x = 1$.

(h) Montrer finalement que $f = \Gamma$.

Pour $x \in \mathbb{N}^*$, c'est déjà montré.
Pour $x > 0$ avec $x \notin \mathbb{N}^*$, on pose $n = [x]$ et $y = x - n$.
On a $y \in ]0,1[$. On a $f(y) = \Gamma(y)$ puis $f(x) = f(y+n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(y+k)\right) f(y) = \Gamma(x)$.

33. Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

On remarque que $\dfrac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} = v_n(x).\dfrac{x}{n+x}$ d'où le résultat.

*Cette formule est due à Euler. On admettra par la suite qu'elle reste valable lorsque x est un nombre complexe dont la partie réelle est strictement positif.*

## Troisième partie : fonction caractéristique

**Définition 5.** *Pour $X$ une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de $X$ la fonction $\Phi_X$ définie par*

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(\mathrm{i}tX)),$$

*pour tout réel t où cette espérance existe.*

34. Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle $Y$ suivant une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. On n'oubliera pas de préciser son ensemble de définition.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $|\exp(itY)| = 1$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \exp(itk)\mathbb{P}(Y = k)$ est normalement convergente et $\Phi_Y(t)$ est définie.

$$\begin{aligned}\Phi_Y(t) &= \mathbb{E}(\exp(\mathrm{i}tX)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(\mathrm{i}tk)pq^{k-1} \\ &= \frac{p\exp(\mathrm{i}t)}{1 - q\exp(\mathrm{i}t)}\end{aligned}$$

35. On suppose que $X$ est à une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\Phi_X$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

   Comme précédemment $\Phi_X$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est bornée par 1.
   La série étant normalement convergente, la fonction $\Phi_X$ est continue.

   (b) On suppose que $X$ admet une espérance $\mathbb{E}(X)$. Montrer que $\Phi_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\Phi_X$ et sa dérivée.

   On a $\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(itk)\mathbb{P}(X = k)$.
   $\mathbb{E}(X)$ existe donc $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ est convergente.
   La série $\sum ik\exp(itk)\mathbb{P}(X = k)$ est donc normalement convergente donc $\Phi_X$ est de classe $C^1$ et $\Phi_X'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} ik\exp(itk)\mathbb{P}(X = k)$. On en déduit $i\mathbb{E}(X) = \Phi_X'(0)$

   (c) Plus généralement, on suppose maintenant que $\mathbb{E}(X^k)$ existe pour tout entier naturel $k$. Montrer que $\Phi_X$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer $\mathbb{E}(X^k)$ en fonction de $\Phi_X$ et de ses dérivées.

   On suppose que $\mathbb{E}(X^k)$ existe donc $\sum_{j=0}^{+\infty} j^k\mathbb{P}(X = j)$ est convergente.
   La série $\sum (ij)^k \exp(itj)\mathbb{P}(X = j)$ est donc normalement convergente.
   Donc $\Phi_X$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\Phi_X^{(k)}(t) = \sum (ij)^k \exp(itj)\mathbb{P}(X = j)$.
   Donc $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$.

   (d) Lorsque $X$ possède une espérance, donner une relation simple entre la fonction génératrice $Q_X$ de $X$ (voir la définition 2) et $\Phi_X$.

   $Q_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ et $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(itX)) = \mathbb{E}(\exp(it)^X)$ donc $\Phi_X(t) = Q_X(\exp(it))$ en étendant la définition de $Q_X$ aux valeurs complexes de module inférieure ou égal à 1. C'est possible car $\sum \mathbb{P}(X = k)$ converge.

36. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$. Déterminer $\Phi_{X+Y}$ en fonction de $\Phi_X$ et de $\Phi_Y$.

   $\Phi_{X+Y} = \Phi_X\Phi_Y$ en utilisant l'indépendance

## Quatrième partie : la loi de Gumbel

**Définition 6.** *On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-x)\cdot\exp(-\exp(-x)) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}. \end{array} \right.$$

37. Montrer que $f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

$f$ est positive et continue.
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = [\exp(-\exp(-x))]_{-\infty}^{+\infty} = 1$

**Définition 7.** *On dit que $X$ suit une loi de Gumbel si $X$ admet $f$ comme densité.*

*Jusqu'à la fin de cette partie, $X$ désigne une variable aléatoire réelle suivant la loi de Gumbel.*

38. Déterminer la fonction de répartition de $X$.

$F_X(x) = \exp(-\exp(-x))$

39. Montrer que $X$ admet une espérance et une variance, sans chercher à les calculer.

•$X$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. en $+\infty$ : $|x[f(x) \leqslant x\exp(-x)$ et $\int_0^{+\infty} x\exp(-x)\mathrm{d}x$ converge
•$|x[f(x)| = o(\dfrac{1}{x^2})$ donc l'intégrale est aussi convergente.
De même pour $\mathbb{E}(X^2)$ donc espérance et variance existent.

40. (a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

L'intégrale étant convergente, on effectue le changement de variable $x = \exp(-t)$ :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \ln(x)\exp(-x)\mathrm{d}x$$

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t$.

•$(1 - \frac{t}{n})^n \to \exp(-t)$.
•Pour $u \in ]0,1[$, $\ln(1-u) \leqslant -u$ donc $n\ln(1 - \frac{t}{n}) \leqslant -t$ donc $((1 - \frac{t}{n})^n) \leqslant e^{-t}$.
Par convergence dominée, on a le résultat.

(c) Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - H_{n+1}\right).$$

On effectue le changement de variable $x = 1 - \frac{t}{n}$. (Toutes les intégrales convergent)

$$\begin{aligned}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n \ln(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 x^n \ln(n-nx)n\mathrm{d}x \\ &= n\ln(n)\int_0^1 x^n \mathrm{d}x + n\int_0^1 x^n\ln(1-x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{n\ln n}{n+1} + n\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Posons $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}a_{n+1} = \int_0^1 (1-u)^{n+1}\ln(u)\mathrm{d}u &= \int_0^1 (1-u)^n \ln(u)(1-u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 (1-u)^n\ln(u)\mathrm{d}u - \int_0^1 (1-u)^n \ln(u)u\mathrm{d}u \\ &= a_n - [-\frac{(1-u)^{n+1}}{n+1}u\ln(u)]_0^1 + \int_0^1 -\frac{(1-u)^{n+1}}{n+1}(\ln u + 1)\mathrm{d}u \\ &= a_n - \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

D'où $(n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n - \dfrac{1}{n+2}$ Par récurrence, $(n+1)a_n = -H_{n+1}$ D'où le résultat.

(d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

$\ln(n) - H_{n+1} = \ln(n) - H_n - \dfrac{1}{n+1} \to -\gamma$ d'où $\mathbb{E}(X) = \gamma$

41. Montrer que $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Même raisonnement que pour l'espérance.

*Avec des méthodes semblables à celles de la question 40. (c) on peut montrer (on ne demande pas de le faire !) que*

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n (\ln(t))^2\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\left((\ln(n))^2 - 2\ln(n)H_{n+1} + 2\sum_{i=1}^{n+1}\frac{H_i}{i}\right).$$

42. (a) Établir que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{H_i}{i} = H_n^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

Considérons $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{1}{ij} = (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})^2 = H_n^2$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{1}{ij} &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{ij} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \frac{1}{ij} \\
&= 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{ij} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}(H_j - \frac{1}{j}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{H_j}{j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}
\end{aligned}$$

D'où le résultat

(b) En déduire la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ donc $H_n^2 = \ln(n)^2 + \gamma^2 + 2\gamma \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})$ et $\ln(n)H_{n+1} = \ln(n)H_n + \frac{\ln(n)}{n+1} = (\ln n)^2 + \ln(n)\gamma + \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln(n)}{n+1} + o(\frac{\ln(n)}{n})$ Donc $\mathbb{E}(X^2) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$ puis $\mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2}{6}$

43. *On rappelle que $\Phi_X$ est la fonction caractéristique associée à $X$ introduite à la partie précédente, définition 5.* Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(t) = \Gamma(1 - \mathrm{i}t).$$

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\exp(-x)\exp(-\exp(-x))\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{+\infty} u^{-it}\exp(-u)\mathrm{d}u \\
&= \Gamma(1 - it)
\end{aligned}$$

## Cinquième partie : convergence en loi

*On rappelle que pour tout entier naturel $n$ non nul, $T_n$ désigne la variable aléatoire introduite dans la première partie, égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois au moins chacun des $n$ jetons. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose*

$$Z_n = \frac{T_n - n\ln(n)}{n}.$$

44. Soit $n$ un entier naturel non nul. Exprimer $\Phi_{Z_n}$ en fonction de $\Phi_{T_n}$.

$$\begin{aligned}
\Phi_{Zn}(t) &= \mathbb{E}(\exp(itZ_n)) \\
&= \mathbb{E}(\exp(it\frac{T_n - n\ln(n)}{n})) \\
&= \exp(-it\ln n)\mathbb{E}(\exp(it\frac{T_n}{n})) \\
&= \exp(-it\ln n)\Phi_{Tn}(\frac{t}{n})
\end{aligned}$$

45. Montrer que pour tout $t \in ]-\infty, 1[$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \Phi_{Z_n}(t) = \Gamma(1 - \mathrm{i}t).$$

$\Phi_{T_n}(u) = Q_{T_n}(\exp(iu))$ puis utiliser la formule du 30a, et la formule d'Euler pour passer à la limite....

*On admet que ce résultat assure la convergence en loi de $Z_n$ vers une loi de Gumbel.*

46. Montrer pour tout réel $\epsilon$ strictement positif,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(T_n - n\ln(n) \leqslant \epsilon n) = \exp(-\exp(-\epsilon)).$$

D'après la convergence en loi, (convergence des fonctions de répartition)

$$\mathbb{P}(T_n - n\ln(n) \leqslant \epsilon n) = \mathbb{P}(Z_n \leqslant \epsilon) \rightarrow \exp(-\exp(-\epsilon))$$